Ueber

Ovale und Eiflächen.

Inaugural-Dissertation

von

Hermann Brunn.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1887.

Ueber

Ovale und Eiflächen.

Inaugural-Dissertation

von

Hermann Brunn.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1887.

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Gymnasial-Professor

Hermann Müller

gewidmet.

Vorwort.

Die vorliegenden elementargeometrischen Untersuchungen beschäftigen sich mit gewissen im Endlichen liegenden, reellen Kurven und Flächen, welche ich Ovale und Eiflächen genannt habe. Von analytischer Darstellbarkeit dieser „Eigebilde“ ist abgesehen.

Der Gegenstand ist ein sehr einfacher; immerhin hoffe ich, dass die Zusammenfassung des ganzen Themas, die überhaupt nur auf dem elementaren Gebiete möglich wird, neu, und dass im zweiten und dritten Kapitel einiges noch nicht Beobachtete oder Formulirte angeführt ist. Auf Vollständigkeit will die Arbeit an keiner Stelle Anspruch erheben. Sie gliedert sich in drei Kapitel: Das erste gibt die Definitionen und einfachsten Grundeigenschaften, das zweite behandelt Krümmungs- das dritte Querschnittverhältnisse von Eigebilden. Im zweiten Kapitel werden einige das Material beschränkende Voraussetzungen nöthig, die im dritten Kapitel wieder wegfallen.

I.

1. Eine im Endlichen liegende geschlossene Kurve, die mit jeder sie durchsetzenden Geraden ihrer Ebene zwei und nur zwei Punkte gemein hat, heisse ein Oval.

2. Ein Oval hat weder Endpunkte, Doppelpunkte, Wendepunkte noch Spitzen, dagegen kann es Ecken aufweisen und gerade Strecken als Bestandtheile enthalten. Es theilt die Punkte seiner Ebene in innere und äussere; zu den letzteren gehören die unendlich fernen Punkte. Nach aussen ist ein Oval überall konvex und seine Totalkrümmung ist gleich der des Kreises 2π.

Die Tangenten an ein Oval haben das Kriterium, dass sie Punkte mit dem Oval gemein haben, ohne in das Innere des Ovals einzudringen. Werden die inneren Punkte zum Oval hinzugenommen, so entsteht ein Ebenenstück, das ich als „volles Oval" bezeichne.

3. Eine im Endlichen liegende geschlossene Fläche, die mit jeder sie durchsetzenden Geraden zwei und nur zwei Punkte gemein hat, heisse eine Eifläche.

4. Eine Eifläche hat keine singulären Stellen, welche durch eine Ebene geschnitten auf dem Schnittoval (s. 6) eine der oben ausgeschlossenen Singularitäten entstehen lassen. Dagegen kann sie Ecken und Kanten aufweisen, auch können gerade Strecken und ebene Stücke auf ihr liegen. Sie theilt die Punkte des Raumes in innere und äussere; zu den letz-

teren gehören die unendlich fernen; nach aussen ist sie überall konvex, und ihre Totalkrümmung ist gleich derjenigen der Kugel, 4π. Als Kriterium für Tangenten und Tangentialebenen an Eiflächen kann gelten, dass sie Punkte mit der Fläche gemein haben, ohne in ihr inneres einzudringen. Werden die inneren Punkte zur Eifläche hinzugenommen, so entsteht ein Körper, den wir als „volles Eigebilde" bezeichnen wollen.

5. Ein Oval kann sich auf einen Punkt oder auf eine gerade Strecke, eine Eifläche auf einen Punkt, eine gerade Strecke oder ein volles Oval zusammenziehen.

In diesen Fällen modificiren sich die Eigenschaften der Eigebilde. Wenn wir im Folgenden von einem Oval oder einer Eifläche sprechen, so denken wir uns zwar, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, diese speciellen Gestalten sowie die vollen Eigebilde ausgeschlossen; es sei aber darauf hingewiesen, dass beide Arten als unter die Definition der Eigebilde fallend zu betrachten sind, wenn gewisse Sätze ganz allgemeine Gültigkeit haben sollen, wie z. B. der folgende:

6. Eine Eifläche hat mit jeder treffenden Ebene ein Oval gemein.

Reciprok zu der Eigenschaft, welche die Definitionen aussprechen, ist folgende:

7. An ein Oval gehen von jedem äusseren Punkte zwei Tangenten, an eine Eifläche von jeder nicht treffenden Geraden zwei Tangentialebenen.

Von den mehrfach sich darbietenden Umkehrungen sei nur folgende erwähnt:

8. Eine Kurve ohne Ende, eine Fläche ohne Randpunkte, die auf einer Seite einer jeden Tangente, resp. einer jeden Tangentialebene liegt, ist ein Eigebilde.

Schliesslich findet noch häufige Anwendung:

9. Jede endliche gerade Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten eines Eigebildes — Sehne — liegt vollständig im Innern desselben, ein Sehnenpolygon oder ein Polyeder aus Sehnenpolygonen somit ebenfalls; und:

10. Zu n Punkten eines Ovals, als Ecken genommen, lässt sich stets ein Polygon mit lauter ausspringenden Winkeln — konvexes Polygon — zu n Punkten einer Eifläche stets ein konvexes Polyëder konstruiren, so dass dies Polygon und dies Polyëder selbst ein specielles Eigebilde darstellt.

II.

1. Während die Länge eines Ovals, die Oberfläche einer Eifläche stets eine bestimmte Grösse ist, wird die Existenz eines bestimmten Krümmungsmasses in jedem Punkte eines Eigebildes durch die gegebene Definition desselben und selbst durch die Ausschliessung von Ecken noch nicht garantirt.

Man nehme folgendes Beispiel:

Zwei Kreissektoren gleichen Centriwinkels φ, c a d und d b c′, der eine, um zu exemplificiren, von doppelt so grossem Radius als der andre — b d = 2 a d —, aneinanderliegend wie in Fig 1, werden in beliebig ofter Wiederholung, wie es die Figur punktirt andeutet, aneinandergelegt, so dass eine kreisende Linie entsteht: c d c′ d′ c″ d″... Die markirten Punkte derselben liegen sämmtlich auf dem durch drei der Punkte bestimmten Kreise K. Ist die Peripherie des Kreises ein ganzes Vielfache m des zur Sehne c c′ gehörigen Bogens (von K), so schliesst sich die Linie nach einem Umlauf. Sie ist ein Oval, da sie vollständig auf einer Seite einer jeden Tangente liegt (I, 8). Wird nun φ durch Vergrösserung

von m genügend verkleinert, so wird die kreisende Linie dem Kreis beliebig angenähert werden können, ohne irgendwo seiner Krümmung sich zu nähern. Oder: der Kreis, angesehen als Resultat des Grenzprozesses, den wir mit der doch stetig zusammenhängenden und nirgends eine Ecke aufweisenden Linie c d c′ d′ . . . vornehmen, hat überall unstetiges und unbestimmbares, wenn man will also gar kein Krümmungsmass.

Andererseits beschränken die in diesem Kapitel den Eigebilden auferlegten Bedingungen — Bestimmtheit und Stetigkeit des Krümmungsmasses, Anwendbarkeit des Meunier'schen Satzes — das Material doch noch keineswegs auf solche Gebilde, welche durch einen analytischen Ausdruck wiedergegeben werden. Es seien z. B. e e′ und f f′ zwei gleiche, durch ihre Endpunkte bezeichnete Kreisbögen vom Radius r. Eine passend gewählte Ellipse E weist den nemlichen Krümmungsradius in vier Punkten auf, in denen wir E zerschnitten denken. Sind a a′ und b b′ zwei gleiche unter den entstehenden Stücken, so lässt sich aus e e′, f f′, a a′ und b b′ ein zweiaxiges Oval von überall bestimmter und stetiger Krümmung, aus dem Oval durch Rotation um eine der Axen eine Eifläche herstellen, welche den gestellten Bedingungen genügt. Eine solche Eifläche kann im Folgenden vielfach als Beispiel dienen.

Es ist hier ein Punkt, an den sich noch einige unerledigte Fragen knüpfen, auf die wir nicht eingehen; wir resumiren nur noch ein Mal:

Von den Eigebilden, auf welche der folgende Abschnitt Anwendung finden soll, müssen wir auf irgend eine Weise versichert sein, dass ihre Punkte bestimmtes Krümmungsmass besitzen, und die Anwendung des Meunier'schen Satzes zulassen.

2 Unter dieser Voraussetzung ist das Mass der Krümmung in einem Kurvenpunkte in abgekürzter Ausdrucksweise gleich dem Quotienten aus dem Contingenzwinkel und dem Kurvenelement. Bezeichnet man einen gewissen Drehungssinn als positiv, den entgegengesetzten als negativ, und lässt eine

Kurve von einem Punkt in einem bestimmten Sinne durchlaufen, so kann der Contingenzwinkel an gewissen Stellen positiv, an andern negativ ausfallen. In einem Oval ist aber jedenfalls an allen Stellen das Krümmungsmass vom nemlichen Vorzeichen. Wir bestimmen den Sinn, in dem simultan betrachtete Ovale durchlaufen werden sollen stets so, dass für alle das Krümmungsmass positiv ist.

3. Den Zahlenraum von der Zahl des kleinsten bis zur Zahl des grössten Krümmungsmasses, welches in einer Kurve vorkommt, nenne ich das Krümmungsgebiet der Kurve. Ich sage, dass zwei Kurven getrennte Krümmungsgebiete haben, wenn ihre Krümmungsgebiete keinen gemeinsamen Zahlenwerth aufweisen, aneinandergrenzende, wenn das kleinste Krümmungsmass des höhern Gebietes (d. i. des Gebietes grösserer Krümmungsmasse) gleich dem grössten Krümmungsmass des niedrigeren Gebietes ist.

4. Abkürzungen: Krümmungsmass: μ
Krümmungsgebiet: γ.

5. Bei einer Fläche betrachten wir in jedem Punkte p sämmtliche in p auf der Fläche senkrecht stehenden ebenen Schnitte. Jeder derselben hat in p ein bestimmtes μ. Der Zahlenraum vom kleinsten bis zum grössten μ, das sich auf diese Weise an der ganzen Fläche vorfindet, heisse das Krümmungsgebiet γ der Fläche. Dieser Begriff bezieht sich also nicht auf das, was man nach Gauss als Krümmungsmass einer Fläche in einem bestimmten Punkte zu bezeichnen pflegt: $\frac{1}{r \cdot r'}$[1]). Uebrigens gebrauche ich die nemlichen Bezeichnungen wie bei Kurven.

---

1) r und r′ Hauptkrümmungsradien.

6. Nach dem Meunier'schen Satze ergibt sich, dass das γ eines ebenen Schnittes einer Fläche nicht unter das γ der Fläche herabreicht.

7. Im Folgenden bezeichne ich mit korrespondirender Lage zweier über den nemlichen End- resp. Randpunkten stehenden Ovalbögen, resp. Eiflächenwölbungen eine solche, bei der sie die Konvexität nach der nemlichen Seite kehren. [Das Individuum grösserer Totalkrümmung heisse das stärkere].

8. Zwei korrespondirende Bögen oder Wölbungen, die ausser den End- oder Randpunkten keine weiteren gemeinsam haben, bilden einen Meniskus.

9. Innerer Bogen (oder innere Wölbung) eines Meniskus ist der (die) auf der konkaven Seite des (der) andern.

10. Berühren sich zwei Ovale oder Eiflächen innerlich, ohne sich im Berührpunkt zu durchschneiden, so ist das innerlich liegende Individuum das von stärkerem Krümmungsmass in dem Berührpunkt, oder in den Begrenzungspunkten der Berührstelle (und umgekehrt).

11. Will man Ovale und Eiflächen mit einzelnen Ecken in die folgenden Untersuchungen einschliessen, so hat man Ecken als Stellen von unendlich grossem Krümmungsmass zu behandeln. An Eiflächen gilt somit das Krümmungsmass jedes ebenen durch eine Ecke gelegten Schnittes in der Ecke als unendlich; Tangentialebene und Normale einer Ecke sind zwar vieldeutig; aber insofern wir einen Augenblick eine bestimmte Lage der Normale bevorzugen und für Stellen unendlichen Krümmungsmasses keinen Massunterschied mehr machen, gibt der Meunier'sche Satz, auf Ecken angewandt, ein formell richtiges Resultat.

Dagegen muss, um den erwähnten Satz anwenden zu können, das Vorkommen von Kanten an Eiflächen (für dieses Kapitel II) ausgeschlossen werden.

Geradlinige Polygone treten in den Untersuchungen des II. Kapitels desswegen nicht auf, weil sie nach der voraus-

gehenden Festsetzung sowohl Stellen, wo $\mu = 0$, als Stellen, wo $\mu = \infty$ ist, aufweisen, und somit keine Ovale existiren, die ein vom Krümmungsgebiet eines Polygons getrenntes Krümmungsgebiet haben. Ebensowenig können die in Theil I erwähnten speziellen Gestalten von Eigebilden auftreten.

Ovale.

12. Betrachten wir jetzt den Meniskus eines Ovals, dessen innerer Bogen B_1, dessen äusserer Bogen B_2 ist, und bei dem die Totalkrümmung von $B_2 < \pi$ ist; s. Fig. 2. Es ist dann möglich durch die gemeinsamen Endpunkte a und b beider Bögen zwei parallele Gerade G und G′ zu legen, welche ausser in a und b die beiden Bögen nicht mehr schneiden. Nun verschieben wir B_2 so, dass die Sehne a b sich selbst parallel, a auf G, b auf G′ bleibt, und B_2 über B_1 weggleitet, in der Figur von oben nach unten. Schliesslich wird B_2 ganz unter B_1 gebracht sein, nach B_2'. Zwischen B_2 und B_2' muss sich eine Lage B_2'' befinden, so dass B_2'' mit B_1 nur noch Punkte oder Strecken gemein hat, im übrigen ganz unter B_1 liegt.

In solchen Punkten c oder Strecken c d, 1. Fig. 3 und 4 berühren sich B_1 und B_2'', weil bei einem Schnitt gewöhnlicher Kurvenelemente Punkte von B_2'' noch über B_1 liegen müssten, die Endpunkte aber jedenfalls nicht ins Spiel kommen. In c oder c und d ist nach 10. das μ von B_2'' grösser als das von B_1. Wir erkennen als Resultat:

13. Ist ein Ovalbogen von der Totalkrümmung $< \pi$ an einem Monde der äussere, so ist die obere Grenze seines Krümmungsgebietes ein grösserer Zahlenwerth als die untere Grenze des Krümmungsgebietes des innern Bogens. — Sicher ist also das γ des äussern Bogens nicht ein vom γ des innern getrenntes oder an dasselbe angrenzendes und zugleich niedrigeres.

Ganz ähnlich beweist man, s. Fig. 5:

14. Ist ein Ovalbogen von der Totalkrümmung $\geq \pi$ an einem Monde der innere, so ist die obere Grenze seines Krümmungsgebietes ein grösserer Zahlenwerth als die untere Grenze des Krümmungsgebietes des äussern Bogens. Sicher ist also das γ des innern Bogens nicht ein vom γ des äussern getrenntes oder daran angrenzendes und zugleich niedrigeres.

Wir können jetzt folgenden Satz ableiten:

15. Zwei Ovale getrennter Krümmungsgebiete, die sich überhaupt treffen, schneiden sich stets in zwei und nur zwei Punkten, zwei Ovale aneinandergrenzender Krümmungsgebiete im Allgemeinen ebenfalls, doch können diese auch mehr als zwei Punkte gemein haben, welche eine stetige Folge bilden und auf einem Kreisbogen des Grenzkrümmungsmasses $\varkappa$ liegen.

16. Denn: Es seien B_1 und B_2 Ovale von getrennten oder aneinandergrenzenden Gebieten γ, und γ_1 sei das niedrigere Gebiet. Falls in mehr als zwei schneiden sich B_1 und B_2 mindestens in vier Punkten, wodurch vier Menisken entstehen. In zweien derselben ist der Bogen von B_1 der äussere, was 13. nur dann nicht widerspricht, wenn die Totalkrümmung jedes einzelnen der letzterwähnten beiden Bögen $> \pi$ ist. Dies befindet sich aber im Widerspruch damit, dass die beiden Bögen keine Theile gemeinsam haben und die Totalkrümmung von B_1 nur 2π beträgt.

17. Wenn statt zweier[1]) von den im vorhergehenden getrennt supponirten Schnittpunkten eine, oder statt aller vier

1) Eine wie man sagt dreipunktige Berührung, bei der beide Kurven im Berührpunkt sich schneiden, kann nicht vorkommen, da in diesem Falle beide Ovale γ aufweisen müssten, die sich theilweise überdecken.

Schnittpunkte zwei Berührungen eintreten könnten, so würden gerade die zwei in Betracht kommenden Menisken erhalten bleiben; ebenso in dem Falle, dass B_1 und B_2 aneinandergrenzende γ haben und statt eines Berührpunktes eine Berührstrecke gesetzt wird.

18. Es gilt übrigens auch umgekehrt: Wenn zwei Ovale in jeder beliebigen Lage, in der sie Punkte mit einander gemein haben, sich nach zwei und nur zwei Punkten schneiden, oder eine und nur eine Berührung eingehen, so haben sie getrennte Krümmungsgebiete. Gestattet man den Ovalen noch, mehr als zwei Punkte gemein zu haben unter der Bedingung, dass dieselben eine stetige Folge bilden, so haben die Ovale aneinandergrenzende Krümmungsgebiete.

Ferner:

19. Von zwei Ovalen getrennter oder aneinandergrenzender Krümmungsgebiete kann das Oval höheren Krümmungsgebietes ganz in das Innere des Ovals niedrigeren Krümmungsgebietes gebracht werden, und zwar so, dass es, um gewisse[1]) Punkte in seinem Innern gedreht, in keiner Lage Punkte mit dem umfangenden Oval gemein hat. Wenn zwei solche Ovale sich schneiden, so ist der Bogen des schwächer gekrümmten Ovals, der innerhalb des stärker gekrümmten liegt, immer von kleinerer Totalkrümmung als π.

20. Man erkennt dies, indem man zwischen B_1 und B_2 einen Kreis K einschiebt dessen $\mu = \varkappa$ ist, und zwischen γ_1 und γ_2 (zu B_1 und B_2 resp. gehörige γ) liegt, ev. dem γ_1 und γ_2 gemeinsamen μ gleich ist. Lässt man B_1 in irgend einem Punkte p von K und B_2 zugleich berühren, so hat K und B_2 mit B_1, B_2 mit K nur den Punkt p gemein (ev. eine Strecke

1) Das heisst: ein solcher Punkt muss mindestens existiren.

p q), alle übrigen Punkte der Ovale B_2 und K haben von B_1, alle übrigen Punkte des Ovals B_2 haben von K eine, wenn auch noch so kleine Entfernung.

Man kann daher erst K mit B_2 fest verbunden durch eine kleine Parallelverschiebung ganz in das Innere von B_1 bringen, dann ebenso B_2 ganz in das Innere von K. Dreht man nun B_2 um den Mittelpunkt von K, so bleibt es stets ganz innerhalb K, somit auch innerhalb B_1 · q · e · d.

Um die Uebertragung in den Raum beginnen zu können, müssen wir noch einige Hilfssätze aufstellen.

21. Zwei Ovale B_1 und B_2, die sich äusserlich berühren, haben stets nur den einen Berührpunkt gemein, wenn sie nicht beide gerade Strecken aufweisen. Letzteres findet bei Ovalen von getrennten oder aneinandergrenzenden γ nie statt.

22. B_1 und B_2 liegen ganz auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente.

23. In der Nähe einer äusserlichen Berührlage schneiden sich, bis zu einer endlichen Grenze der Verschiebung, B_1 und B_2 jedenfalls nur in zwei Punkten, wenn nicht eines der beiden Ovale unendlich kleine Dimensionen hat.

24. Denn sind in Fig. 6 a, b, c, d vier Schnittpunkte beider Ovale, und schneiden sich die Geraden a b und c d in e, so muss das zweite nicht gezeichnete Oval B_2 mit denjenigen Punkten, welche auf der obern Seite von b c liegen, vollständig in das beliebig kleine Dreieck b e c hineinfallen. Die obere Seite von b c ist aber zugleich die, auf welcher bei einer im Verhältniss zu den Dimensionen von B_2 kleinen Verrückung noch der grössere Theil von B_2 liegen muss. Solange also Δ b e c dem Inhalte nach kleiner ist, als der mit ihm auf gleicher Seite von b c liegende Theil von B_2, kann B_2 B_1 jedenfalls nur in zwei Punkten schneiden.

Eiflächen.

Mittels des letzten Satzes beweist man leicht den folgenden:

25. Zwei Eiflächen können in Schnittlagen, die einer Lage äusserer Berührung genügend nahe sind — und dies geschieht schon bei einer endlichen Lagenverschiedenheit[1]) — nur eine Schnittkurve miteinander gemein haben, ohne Doppel- und Endpunkte; dieselbe kann somit in einem Zuge durchlaufen werden.

Ferner gilt, wenn zwei Eiflächen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ resp. die getrennten Krümmungsgebiete γ_1 und γ_2 haben, und γ_1 niedriger ist als γ_2:

26. Wenn $\mathfrak{E}_2$ $\mathfrak{E}_1$ innerlich berührt, so findet die Berührung in einem einzelnen Punkt statt, und es liegt in der Nähe des Berührpunktes $\mathfrak{E}_2$ jedenfalls ganz innerhalb $\mathfrak{E}_1$. Grenzen γ_1 und γ_2 aneinander, so können $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ eine Strecke oder ein Flächenstück miteinander gemein haben — Theile einer Kugel des Grenzkrümmungsmasses $\varkappa$ —, an den Begrenzungspunkten der gemeinsamen Punktmannichfaltigkeit biegt aber $\mathfrak{E}_2$ jedenfalls in das Innere von $\mathfrak{E}_1$ ein.

27. Man erkennt dies unter Beiziehung der Definition 5. durch Ausführung der Normalschnitte in den gemeinsamen Punkten. Liegen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ in getrennten γ, so könnte man vielleicht noch glauben, die Berührung fände möglicherweise nach einer Kurve statt. Dies ist nicht möglich. In den Punkten dieser Kurve würden $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ gemeinsame Normalebenen durch die Kurventangenten aufweisen. Setzen wir für einen Punkt der Kurve den Winkel zwischen dieser Normalebene und der Oskulationsebene $= \alpha$, das Mass der „ersten“

1) Wenn die Flächen endliche Dimensionen haben.

Krümmung der Berührkurve $= \frac{1}{r}$, so ergibt sich als Krümmungsmass des Normalschnittes sowohl von $\mathfrak{E}_1$ als $\mathfrak{E}_2$ in dem betrachteten Punkte $\frac{\cos \alpha}{r}$, d. h. $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ haben nicht getrennte Krümmungsgebiete. (5).

28. Hat man aneinandergrenzende γ — der gemeinsame Grenzwerth μ werde, wie auch stets im Folgenden, gleich $\varkappa$ gesetzt — und findet die Berührung der Eiflächen nach einer Kurve R statt, so muss im Allgemeinen die Berührung in einem ganzen Flächenstück einer Kugel von der Krümmung $\varkappa$ stattfinden.

Wie sich nachweisen lässt, liegt R auf einer Kugel $\mathfrak{K}$ der Krümmung $\varkappa$, welche beide Flächen in R berührt[1]).

R kann im Allgemeinen durch eine einfach unendliche Mannichfaltigkeit von grössten Kreisen der Kugel $\mathfrak{K}$ in zwei (oder mehr) Punkten geschnitten werden. Ein beliebiger dieser grössten Kreise, C, würde in zwei solchen Schnittpunkten $\mathfrak{E}_2$ — die Eifläche von höherem γ — berühren, also 4 Punkte mit $\mathfrak{E}_2$ gemein haben können.

Dies ist aber nicht möglich, denn aus 15. im Verein mit 16. folgt:

29. Eine Eifläche hat mit einem treffenden Oval getrennten niedrigeren Krümmungsgebietes zwei und nur zwei Punkte gemein, mit einem Oval angrenzenden niedrigeren Krümmungsgebietes im Allgemeinen auch, doch kann es mit letzterem auch mehr als zwei Punkte gemein haben, welche *eine* stetige Folge bilden, und auf einem Kreisbogen des Grenzkrümmungsmasses $\varkappa$ liegen.

1) R muss für beide Flächen Krümmungslinie sein.

Somit muss in dem bei 28. erwähnten Fall einer der beiden Bögen C zwischen beiden Berührpunkten vollständig zu $\mathfrak{E}_2$ gehören, und dies findet für jede Lage von C statt, welche R zwei Mal schneidet.

Es gibt nur in dem Fall keine solche Lage C, wenn R der Theil eines grössten Kreises von $\mathfrak{K}$ ist.

30. Man sieht, dass die Schnittkurve zweier in getrennten oder aneinandergrenzenden Krümmungsgebieten liegenden Eiflächen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ weder bei innerer noch bei äusserer Berührung einen eigentlichen Doppelpunkt haben kann.

Zur Vorbereitung auf 34. diene noch Folgendes:

31. Wenn zwei ganz beliebige Eiflächen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ sich nach verschiedenen einzügigen Kurven ohne Doppelpunkt S_1, S_2, $S_3 \ldots S_n$ schneiden[1]), so trennt jede solche Kurve die Oberfläche von $\mathfrak{E}$ sowohl als $\mathfrak{E}$ in zwei Partieen (die wir willkürlich als innere und äussere Punkte bezeichnen können) resp. $\mathfrak{S}'_1$, und $\mathfrak{S}''_1$, $\mathfrak{S}'_1$ und $\mathfrak{S}''_1$ etc. Die Anzahl der Schnitte sei endlich. Wählen wir irgend ein S_ν aus, so werden im Allgemeinen die übrigen S sowohl in $\mathfrak{S}'_\nu$ als in $\mathfrak{S}''_\nu$ liegen. Sei S_ϱ eine solche Kurve, die in $\mathfrak{S}'_\nu$ liegt, dann liegt entweder $\mathfrak{S}'_\varrho$ oder $\mathfrak{S}''_\varrho$ vollständig innerhalb $\mathfrak{S}'_\nu$; sei es z. B. $\mathfrak{S}'_\varrho$; liegt eine weitere Kurve S_σ innerhalb $\mathfrak{S}'_\varrho$, so liegt wieder entweder $\mathfrak{S}'_\sigma$ oder $\mathfrak{S}''_\sigma$ vollständig innerhalb $\mathfrak{S}'_\varrho$. Es sei $\mathfrak{S}'_\sigma$. So fahren wir fort, bis wir schliesslich zu einer Kurve, etwa S_1, gelangen, bei der die Operation aufhört.

Wir stellen eine zweite solche Reihe auf, indem wir wieder von S_ν ausgehend, statt $\mathfrak{S}'_\nu$ jetzt $\mathfrak{S}''_\nu$ in Betracht ziehen. und gelangen zum Schlusse etwa zur Kurve S_2. S_1 und S_2 sind jedenfalls verschieden, sobald überhaupt zwei S vorhanden sind, und haben, wenn die Bezeichnung entsprechend vertheilt wird, folgende Eigenschaften:

---

1) Dass es mehr als zwei sein können, erkennt man an den Durchdringungen konvexer Polyeder.

32. In $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ liegt keine Schnittkurve S mehr; $\mathfrak{S}_1'$ liegt in $\mathfrak{S}_2''$ und $\mathfrak{S}_2'$ in $\mathfrak{S}_1''$. $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ liegen entweder beide innerhalb, oder beide ausserhalb von $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ also resp. beide ausserhalb oder innerhalb von $\mathfrak{E}$. Wir nehmen $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ ausserhalb $\mathfrak{E}$ an.

33. Wenn nun die Kurve S_1 auf der Fläche $\mathfrak{E}$ bleibend sich unter Beibehaltung ihrer Eigenschaften der Einzügigkeit, Geschlossenheit und Doppelpunktlosigkeit[1]) auf einen Punkt[2]) zusammenzieht, so wird sie, wenn dies geschehen ist, entweder alle Punkte von $\mathfrak{S}_1'$ oder alle Punkte von $\mathfrak{S}_1''$ bei ihrer Verwandlung überstrichen haben, und im letztern Falle mit dem einer ähnlichen Verwandlung unterzogenen S_2 nothwendig irgendwo zusammengestossen sein, und sei es auch erst in dem zuletzt erreichten Punkte.

Jetzt können wir beweisen:

34. Zwei Eiflächen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ getrennter Krümmungsgebiete können sich überhaupt nur nach *einer* (geschlossenen, doppelpunktlosen) Kurve S schneiden oder *eine* Berührung in einem Punkte eingehen.

Denn machen wir die Annahme, dass mehr vorhanden sind, so dürfen wir auch annehmen, dass S_1 und S_2 ganz in der bei 32. angegebenen Weise ausgewählt sind, und dass das Innen und Aussen sich dabei genau so verhält, wie dort angegeben.

Wir denken uns dann an einen Punkt s_1 von S_1 und s_2 von S_2 die Tangentialebenen an $\mathfrak{E}$ gelegt, und die Halbebenen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bestimmt, zwischen denen $\mathfrak{E}$ vollständig eingeschlossen liegt. Den Halbwinkelraum, in dem $\mathfrak{E}$ liegt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$, den übrigen Raum mit $\mathfrak{H}$. (Fig. 7.)

35. Die getroffene Anordnung sichert, dass Theile von $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ in $\mathfrak{H}$ liegen. Es ist möglich in einem Sinne fort-

1) Mit Rücksicht auf 30. Anwendung s. 36.

2) Oder ein Kurvenstück mit zwei Endpunkten.

gehend, eine Verschiebung von $\mathfrak{E}$ vorzunehmen, bei der sich alle Punkte auf parallelen Geraden der Richtung ϱ bewegen, so dass jede dieser Geraden R das System der beiden (in T sich schneidenden) Halbebenen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nur ein Mal schneidet. Die Verschiebung soll so geschehen, dass die inneren Punkte von $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{H}$ gelangen, in der Figur also nach oben. Ein Punkt von $\mathfrak{E}$, der $\mathfrak{H}$ bei dieser Verschiebung ein Mal verlassen hat, oder sich von Anfang an in $\mathfrak{H}$ befindet, wird im ganzen weitern Verlauf in $\mathfrak{H}$ verbleiben.

36. Nach genügend weiter Verschiebung hat $\mathfrak{E}$ gewiss keine Punkte mehr mit $\mathfrak{E}$ gemein; in einer Lage muss es $\mathfrak{E}$ jedenfalls äusserlich berühren, und kurz vor dieser Lage $\mathfrak{E}$ nur nach einer Kurve schneiden (25). Es muss also im Verlauf der Verschiebung bis dahin aus den zwei Kurven eine geworden sein, durch Vereinigung beider, oder durch Verschwinden einer, oder durch Verschwinden beider und Neuentstehung einer anderen. Ersteres würde einen Doppelpunkt verlangen, der bei getrennten Krümmungsgebieten nicht entstehen kann (30).

Es kann aber auch z. B. S_1 nicht nach Schrumpfung zum Punkt oder zum Kurvenstück mit zwei Endpuncten verschwunden sein. Denn läge dieser Punkt oder dieses Kurvenstück auf $\mathfrak{S}_1'$, so müssten sämmtliche Punkte von $\mathfrak{S}_1'$ überstrichen worden sein (33); von diesen befinden sich aber einige gleich anfangs in $\mathfrak{H}$, während der Schnitt stets innerhalb $\mathfrak{H}$ verlaufen muss. Der Punkt kann also auf $\mathfrak{S}_1'$ nicht liegen, ebensowenig auf $\mathfrak{S}_1''$, weil sonst vorher gewisse, ebenfalls stets ausser $\mathfrak{H}$ bleibende Punkte von $\mathfrak{S}_1''$ auf $\mathfrak{S}_2'$ hätten überstrichen werden müssen.

Es kann somit von Anfang an nur eine Schnittkurve S gegeben haben.

37. Besondere Beachtung verlangt der Fall, wenn man für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ doppelte Berührung in zwei Punkten s_1 und s_2 paralleler Tangentialebenen annimmt, weil er sich dem vorigen

Beweis nicht fügt. Wenn in diesem Fall, nach einer kleinen Parallelverrückung von $\mathfrak{E}$, $\bar{\mathfrak{E}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{E}}}$ überhaupt noch auf $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ Punkte gemein hätten, müssten es Berührpunkte sein, wie man leicht beweist. Wir dürfen dies also ausschliessen. Nach dieser Verrückung liegen die Flächen theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb von einander, d. h. sie schneiden sich und zwar nach Anwendung des vorher bewiesenen nur nach einer Kurve, welche den Punkten s_1 und s_2 beliebig nahe liegende Punkte untereinander verbindet, somit sofort endliche Ausdehnung hat. Diese Diskontinuität kann nicht stattfinden; sie liesse sich nur beseitigen durch die Annahme, dass eine Berührlinie von endlicher Ausdehnung — als Grenzgestalt einer Schnittkurve — schon in der Anfangslage vorhanden war; d. h. s_1 und s_2 würden von Anfang an durch eine (als Schnitt doppelt zu rechnende) Berührlinie verbunden gewesen sein.

Dann würden $\mathfrak{E}$ und $\bar{\mathfrak{E}}$ (27) in aneinandergrenzenden Krümmungsgebieten liegen, ein Fall, den wir jetzt besonders behandeln müssen.

38. Zwei Eiflächen $\mathfrak{E}$ und $\bar{\mathfrak{E}}$ von einandergrenzenden Krümmungsgebieten schneiden sich entweder nach *einer* Kurve, oder sie berühren sich an *einer* Stelle, die nicht nur ein Punkt sondern auch ein Stück einer Kugelfläche sein kann, deren $\mu = \varkappa$ ist.

Man denke sich für die Eifläche $\mathfrak{E}$ vom höheren γ eine ähnliche, in ähnlicher beliebig naher Lage, die beliebig wenig kleiner ist, als $\mathfrak{E}$, substituirt: $\mathfrak{E}.\bar{\mathfrak{E}}$ hat mit $\bar{\mathfrak{E}}$ unter allen Umständen nur eine Schnittkurve oder Berührstelle S gemein (s. o.), weil γ sicher von γ getrennt ist. Substituirt man für $\bar{\mathfrak{E}}$ wieder $\mathfrak{E}$, so kann keine neue Schnittkurve mit einem Meniskus endlichen Rauminhalts, sondern es können höchstens noch weitere Berührstellen entstehen. Und auch dies nur dann, wenn S selbst die spezielle Form einer Berührstelle hat. Denn man sieht, dass ein, diesmal unter Festhaltung einer neu entstandenen Berührstelle für $\bar{\mathfrak{E}}$ substituirtes $\bar{\bar{\mathfrak{E}}}$ innerhalb $\mathfrak{E}$ liegt (34), dass dies also auch von $\bar{\bar{\mathfrak{E}}}$ gelten muss, höchstens

dass $\mathfrak{E}$ noch in einigen andern Stellen $\mathfrak{E}$ berührt. Nun diene uns wieder die Kugel $\mathfrak{K}$ des Grenzkrümmungsmasses $\varkappa$ zwischen γ und γ als Mittelglied. Wenn $\mathfrak{E}$ diese Kugel innerlich berührt, so liegt es nach dem vorigen ganz innerhalb derselben, höchstens mit weiteren Berührpunkten. Das nemliche gilt, wenn man für $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{K}$, für $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{E}$ setzt.

39. Daraus folgt, wenn sich alle drei Flächen in einem Punkte p innerlich berühren, dass eine weitere getrennte Berührstelle q von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E}$, auch eine Berührstelle von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{K}$ sein müsste. Ein Schnitt, durch den Kugelmittelpunkt, p und q geführt, schneidet $\mathfrak{K}$ nach K und $\mathfrak{E}$ nach E. K und E berühren sich getrennt in p und q. E ist aber höheren (höchstens angrenzenden) Krümmungsgebietes als K, also ergibt sich ein Widerspruch mit 15.

Somit kann $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E}$ nur ein zusammenhängendes Punktsystem gemeinsam haben (begrenzt von *einer* Kurve).

40. Es bleibt nur noch zu untersuchen, ob speziell die Kugel $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{E}$ an zwei getrennten Stellen berühren kann, und wenn nicht, welche Begrenzung die eine gemeinsame Berührstelle haben kann.

Dass nicht zwei getrennte Berührstellen auftreten können, beweist man mittels der in 37. angewendeten Methode, indem man etwa in zwei Punkten getrennter Berührstellen die Tangentialebenen legt und $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{E}$ parallel zur Schnittlinie beider Ebenen um ein Kleines verschiebt u. s. f.

41. Nehmen wir nun an, die Berührstelle $\mathfrak{B}$ sei ein Kugelstück, begrenzt durch mehrere Kurven. Zu jeder Kurve gehört ein Meniskus; betrachten wir den der Begrenzungskurve C und sei $\mathfrak{K}$ die zu $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}$ die zu $\mathfrak{E}$ gehörige Wölbung. $\mathfrak{K}$ ist die innere. Die Punkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$ entsprechen einander, wenn man die Punkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$ vermittels der parallelen und auf der nemlichen Seite liegenden (III, 2) Tangentialebenen auf einander bezieht; seien e und k zwei entsprechende Punkte auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$. Wir verschieben $\mathfrak{K}$ in der

Richtung ke um eben diese Strecke parallel mit sich selbst in die Lage $\mathfrak{K}'$, wo dann $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{E}$ sich in e berühren. Dann liegt jedenfalls kein Punkt von $\mathfrak{K}'$ ausserhalb $\mathfrak{E}$ (38). Somit liegen die Endpunkte c′ der von den Punkten c der Kurve C ausgehenden Strecken cc′ der Länge, der Richtung und des Sinnes ke sämmtlich innerhalb $\mathfrak{E}$. Auf den Strecken cc′ kann kein Schnittpunkt mit $\mathfrak{E}$ liegen; es würde daraus sich nemlich ergeben, dass die Gerade cc′ drei getrennte Punkte oder eine Strecke und einen von ihr getrennten Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein haben müsste. Weiter erkennt man: Wenn die Berührpunktkurve der zu ke parallelen Tangenten an $\mathfrak{E}$ P genannt wird, so liegt C vollständig auf einer Seite von P. Für einen derartigen Meniskus lässt sich aber durch eine leicht erweisbare Uebertragung des Satzes 13. in den Raum zeigen, dass die innere Wölbung Punkte von kleinerem γ enthält als die äussere, wenn die Totalkrümmung der letzteren gleich oder kleiner ist als die der Halbkugel ($\leq 2\pi$).

Somit muss die äussere Wölbung $\mathfrak{E}$ der zu den Kurven C gehörigen Menisken grösser sein als die Halbkugel; denn $\varkappa$ ist ja gleich oder grösser als die γ von $\mathfrak{E}$.

Dies ergibt schliesslich bei der Annahme von auch nur zwei Kurven C eine nothwendige theilweise Ueberdeckung der beiden Menisken, welche nicht möglich ist. Somit kann die Berührstelle von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}$ nur eine Begrenzungskurve C aufweisen.

Man erkennt nun die Uebertragbarkeit von 19. und 19a. in den Raum:

42. Von zwei Eiflächen getrennter oder aneinandergrenzender Krümmungsgebiete kann die des höheren, $\mathfrak{E}$, ganz in das Innere der anderen, $\mathfrak{E}$, gebracht werden, und zwar so, dass sie um gewisse, mindestens um einen ihrer inneren Punkte gedreht, im Innern von $\mathfrak{E}$ verbleibt.

43. Schneiden sich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$, so ist die Totalkrümmung des innerhalb $\mathfrak{E}$ liegenden Theiles

von $\mathfrak{E}$ stets kleiner als die Halbkugel; dieser Theil heisse das Innere der Schnittkurve S auf $\mathfrak{E}$.

44. Sind unter der Bezeichnung P die Berührpunktlinien der Systeme paralleler Tangenten an $\mathfrak{E}$ verstanden, so gibt es stets solche P, welche S nicht schneiden.

Noch ein Wort von doppeltgekrümmten Kurven auf der Kugel und auf Eiflächen, die man als „Ovale auf der Kugel“ und „Ovale auf Eiflächen“ bezeichnen könnte.

45. Ist das Krümmungsgebiet der Eifläche $\mathfrak{E}$ getrennt von dem der Kugel $\mathfrak{K}$, oder angrenzend an dasselbe, und höher, so heisse der Schnitt S von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$ ein „Oval auf der Kugel“; er hat mit treffenden grössten Kreisen K der Kugel $\mathfrak{K}$ stets nur zwei Punkte oder *eine* Strecke gemein.

Der Beweis folgt aus 29.

46. Ist das Krümmungsgebiet der Eifläche $\mathfrak{E}$ getrennt von dem der Eifläche $\mathfrak{E}'$, oder angrenzend an dasselbe, und niedriger, und man hat zwei Schnitte S_1 und S_2 beider Eiflächen, deren erster auf $\mathfrak{E}$ ganz innerhalb des zweiten liegt (43), bei festbleibendem $\mathfrak{E}$ durch zwei Lagen von $\mathfrak{E}'$, die mittels Parallelverrückung auseinander entstehen, erzeugt, ist ferner sicher, dass S_1 und S_2 auf $\mathfrak{E}'$ betrachtet, beide vollständig auf ein und derselben Seite einer gewissen ausserhalb $\mathfrak{E}$ bleibenden Kurve P (auf $\mathfrak{E}'$) liegen — so schneiden die innerhalb S_2 liegenden Stücke geodätischer Linien auf $\mathfrak{E}$ S_1 je nur in zwei Punkten oder einer Strecke, wenn sie überhaupt schneiden.

NB. Die Kurve P ist auf $\mathfrak{E}'$ die Berührkurve der Tangenten von der Verschiebungsrichtung ϱ.

47. Beweis. S sei ein beliebiger Schnitt von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, p ein Punkt desselben, $\mathfrak{P}$ die Tangentialebene von $\mathfrak{E}$ in p, $\mathfrak{Q}$ die Oskulationsebene von S in p, T die Tangente von S in p.

Diejenige durch T begrenzte Hälfte von $\mathfrak{P}$, welche innere Punkte von $\mathfrak{E}'$ enthält, mache mit derjenigen durch T begrenzten Hälfte von $\mathfrak{Q}$, welche innere Punkte von $\mathfrak{E}$ enthält, im Innern von $\mathfrak{E}'$ den Winkel φ.

φ ist stets spitz, wo auch p auf S angenommen werde. Sicher ist zunächst, dass für S φ entweder überall spitz oder überall stumpf ist. Denn im gegentheiligen Falle müsste φ bei der Geschlossenheit von S auch irgendwo den Uebergangswerth $\frac{\pi}{2}$ haben. Dort hätte dann S gleiches (erstes) Krümmungsmass mit einem Normalschnitt von $\mathfrak{E}$, was unmöglich ist. (6).

Sicher ist ferner, dass φ für kleine Kurven von S spitz ist. Folglich ist φ für alle S spitz, wie man aus der stetigen Ueberführbarkeit von S in eine kleine Kurve, nach dem Prinzip, das soeben angewandt wurde, beweist.

48. Daraus ergibt sich: Eine Kurve C, welche S von innen in p berührt, hat in p ein (erstes) Krümmungsmass, grösser als das von S im nemlichen Punkte. (Meunier'scher Satz).

Somit kann keine geodätische Linie G auf $\mathfrak{E}$ ein S von innen berühren.

49. Schiebt man zwischen S_1 und S_2 auf $\mathfrak{E}$ die Schaar von Kurven S ein, welche den verschiedenen Lagen von $\mathfrak{E}'$ während der Parallelverrückung (Richtung ϱ) aus der Lage S_1 in die Lage S_2 entsprechen, so bilden dieselben in Folge der im Satze angegebenen Beschränkungen der Bewegung ein System von nirgends sich schneidenden Kurven.

Dies erkennt man durch ebene Schnitte beider Flächen $\# \varrho$.

50. Nehmen wir auf dem Stück G einer geodätischen Linie innerhalb S_2, zwischen a und b (s. Fig. 8) mehr als zwei Schnitte mit S_1 an, etwa c_1, c_2, c_3 und c_4, so muss nothwendig unter den S ein von G innen berührtes sich befinden. Dies ist nach dem Vorhergehenden unmöglich, folglich ist unser Satz richtig.

Es ist möglich, dass der Satz innerhalb weiterer Grenzen gilt, als die angegebenen sind.

Wir bemerken noch:

51. Hat man zwei ebene Schnittfiguren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, resp. von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ — beide Buchstaben in der nemlichen Bedeutung wie bei 44. — und der spitze Winkel ω zwischen Schnittebene und Tangentialebene der Fläche in einem Punkte der Schnittlinie ist nicht für $\mathfrak{S}'$ überall grösser, als bei $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}'$ jedenfalls an Inhalt kleiner als $\mathfrak{S}$.

52. Beweis: Haben $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ z. B. die Winkel ω und ω' resp. in den Punkten a und a′ gleich, so kann man die Flächen so zusammenlegen, dass a und a′ auf einen Punkt, die beiden Schnitt- und die beiden Tangentialebenen je in eine Ebene zusammenfallen, und das Innere beider Schnitte zusammenkommt. Dann muss $\mathfrak{E}'$ $\mathfrak{E}$ innerlich berühren und ganz innerhalb $\mathfrak{E}$ fallen.

Somit fällt jetzt auch $\mathfrak{S}'$ ganz innerhalb $\mathfrak{S}$.

Wären die Winkel ω' von $\mathfrak{S}'$ theilweise grösser, theilweise kleiner als die Winkel ω von $\mathfrak{S}$, so würde auch ein Werth $\omega'_0 = \omega_0$ vorhanden sein. Wären aber sämmtliche ω' kleiner als sämmtliche ω, so wäre kein $\omega' = \frac{\pi}{2}$. Man könnte dann die Schnittebene von $\mathfrak{S}'$ parallel mit sich selbst in $\mathfrak{E}'$ so weit verschieben, bis sie zum ersten Mal eine Schnittfigur $\mathfrak{S}'_1$ mit einem Winkel ω' gleich dem Minimum von ω aufweist, und würde dabei, selbst wenn $\omega_{\min} = \frac{\pi}{2}$ ist, immer haben: $\mathfrak{S}'_1 > \mathfrak{S}'$ [1]).

Aber nach dem Obigen ist

$\mathfrak{S}'_1 < \mathfrak{S}$ also auch $\mathfrak{S} > \mathfrak{S}'$. q.e.d.

1) Man sieht dies z. B. auf folgende Weise ein:

Man legt eine Schaar von parallelen, zu $\mathfrak{S}'$ normalen Ebenen $\mathfrak{N}$, welche $\mathfrak{S}'$ nach den Geraden n′, $\mathfrak{S}'_1$ nach den Geraden n'_1 schneidet. Die Strecken auf den n'_1 sind sämmtlich grösser als die entsprechenden auf den n′, folglich sind auch gewisse Elementartrapeze auf $\mathfrak{S}'_1$ grösser als jene auf $\mathfrak{S}'$ etc.

III.

Die Einschränkungen, welche den Eigebilden im II. Kapitel auferlegt wurden, fallen jetzt wieder weg.

1. Im Folgenden ist unter „Schnittfigur“ immer das volle Eigebilde zu verstehen, welches den Schnitt bildet.

2. Der öfter vorkommende Begriff der gleichen Seiten in zwei parallelen Geraden oder Ebenen wird folgendermassen präzisirt:

In der Geraden A liege das Punktpaar a_1, a_2, in der zu A parallelen Geraden A′ das Punktpaar a_1', a_2'. Ein Punkt des ersten Paares, a_1, liegt mit einem Punkt des zweiten, a_1' dann „auf der nemlichen Seite“, wenn er mit ihm auf ein und derselben Seite der Geraden a_2 a_2' liegt.

Versteht man unter A und A′ parallele Ebenen, unter a_1, a_2 und a_1', a_2' zwei Paare paralleler Geraden in jenen Ebenen, so erhält man die Präzision des Begriffs ganz analog mittels der Ebene a_2 a_2'.

3. Die Geraden oder Ebenen D_1 und D_2, welche resp. a_1 mit a_1', a_2 mit a_2' verbinden, schneiden sich, wie leicht zu zeigen, in dem Raum zwischen A und A′ nicht.

4. In einem Oval findet sich unter einer Schaar von parallelen Sehnen S nur ein Maximum an Länge, das entweder durch *eine* Sehne, oder durch *eine* stetige Folge gleichlanger Sehnen vertreten ist.

Beweis. Wenn mehr als ein Maximum vorhanden wäre, läge dazwischen ein Minimum, also zwischen zwei gleichlangen Sehnen eine kleinere. Wir denken uns nun im Oval C zwei Sehnen S von der Länge λ gefunden, ab und cd, und ziehen die geraden Verbindungsstrecken der auf der nemlichen Seite liegenden Sehnenendpunkte, ac und bd; abcd liegt als Sehnen-

viereck vollständig innerhalb C, oder fällt mit C theilweise oder ganz zusammen; daher können die Sehnen S zwischen ab und cd nur $\geq \lambda$ sein. Ist eine Sehne S zwischen ab und cd vorhanden von der Länge λ, so haben alle zwischenliegenden S die Länge λ. Denn liegt auf der Strecke bd ein weiterer Punkt des Ovals, so gehört sie vollständig zum Oval; ebenso ist es bei ac.

5. In einer Eifläche findet sich unter einer Schaar von parallelen ebenen Schnittfiguren ein und nur ein Maximum an Inhalt, das entweder durch *eine* Schnittfigur oder durch *eine* stetige Folge kongruenter Schnittfiguren gebildet ist, die einen Cylindertheil bilden.

6. Beweis. In zwei parallelen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ seien zwei Rechtecke gleichen Inhalts $\mathfrak{J}$ mit den resp. Seitenlängen α, β und α', β' so gelegen, dass die Seiten der Länge α denen der Länge α' parallel sind. Verbindet man die auf gleichen Seiten liegenden parallelen Seiten beider Rechtecke durch die vier Trapeze, so entsteht ein Obelisk, dessen Querschnitte parallel $\mathfrak{E}$ Rechtecke des Inhalts:

$$\mathfrak{J}' = (\lambda\alpha + \lambda'\alpha')\,(\lambda\beta + \lambda'\beta') \text{ sind.}$$

$$\alpha\beta = \alpha'\beta' = \mathfrak{J};\quad \lambda + \lambda' = 1;\quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

$$\mathfrak{J}' = \lambda^2\,\alpha\beta + \lambda'^2\,\alpha'\beta' + \lambda\lambda'\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

Nun ist:

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta = \mathfrak{J}\,\frac{\alpha^2 + \alpha'^2}{\alpha\alpha'};\quad \alpha^2 + \alpha'^2 \geq 2\alpha\alpha';\ \alpha\beta' + \alpha'\beta \geq 2\mathfrak{J};$$

somit

$$\mathfrak{J}' \geq \mathfrak{J}\,(\lambda^2 + \lambda'^2 + 2\lambda\lambda') = \mathfrak{J}\,(\lambda + \lambda')^2;\ \mathfrak{J}' \geq \mathfrak{J}.$$

Die mittleren Schnittrechtecke sind somit im Allgemeinen sämmtlich grössern Inhalts als die beiden anfänglichen. Gleich, und zwar sämmtlich gleich, sind sie nur für $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Dies ist unser Hilfssatz.

7. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ seien nun zwei parallele ebene Schnittfiguren gleichen Inhalts $\mathfrak{K}$ der Eifläche $\mathfrak{E}$. Wir theilen $\mathfrak{E}$ durch eine beliebige Schaar paralleler Geraden G in kleine Streifen. In Bezug auf den Inhalt lässt sich $\mathfrak{E}$ in bekannter Weise durch ein treppenförmig begrenztes Aggregat von Rechtecken ersetzen, — das einzelne Rechteck liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden G — mit einer Genauigkeit bis auf kleine Grössen erster Ordnung in Bezug auf die einzelnen Streifen, also auch in Bezug auf die ganze Fläche.

8. Wir numeriren unsere G, von der einen Tangente beginnend und zur andern fortschreitend mit: $G_1, G_2, \ldots . G_z$. $\mathfrak{E}'$ theilen wir entsprechend ein, indem wir bei derjenigen, zu G_1 parallelen Tangente, die mit G_1 auf der nemlichen Seite liegt, nemlich bei G_1', beginnen und die Eintheilung bis zu der andern parallelen Tangente G_z' in der Weise fortsetzen, dass immer dem Inhalte nach der Streifen

$$\overline{G_n\, G_{n+1}} = \overline{G_n'\, G_{n+1}'} \text{ ist.}$$

Bei dem gleichen Inhalte beider Ovale muss die Theilung aufgehen.

9. Auch in $\mathfrak{E}'$ dürfen wir die Streifen durch Rechtecke ersetzen. Zwei entsprechende Rechtecke $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ geben, nach Beschreibung des Hilfssatzes, Veranlassung zu einem dünnen Obelisken. Das Aggregat $\mathfrak{P}$ sämmtlicher Obelisken liegt vollständig innerhalb $\mathfrak{E}$, oder höchstens noch in der Fläche $\mathfrak{E}$ selbst. Die Eigur eines mittleren, zu $\mathfrak{E}$ parallelen Schnittes $\mathfrak{P}''$ von $\mathfrak{P}$ muss daher auch innerhalb (oder höchstens etc.) der entsprechenden, d. h. durch die nemliche Ebene erzeugten Schnittfigur $\mathfrak{E}''$ von $\mathfrak{E}$ liegen:

$$\mathfrak{E}'' \geqq \mathfrak{P}''.$$

Nach dem Hilfssatz gilt von $\mathfrak{P}''$, als Summe aus lauter mittleren Schnitten $\mathfrak{R}''$ der elementaren Obelisken:

$$\mathfrak{P}'' > \mathfrak{E}$$

ausser jedes $\mathfrak{R}$ ist gleich und kongruent $\mathfrak{R}'$, so dass sämmtliche Obelisken Parallelepipede werden und

$$\mathfrak{P}'' = \mathfrak{E} \text{ ist.}$$

10. Letzteres kann, wenn die Richtung der Geraden G beliebig ist, nur dann eintreten, wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ kongruent und in ähnlicher Lage sind, worauf $\mathfrak{P}$ in einen Cylinder übergeht.

11. Mit diesem Cylinder muss der zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ liegende Theil der Fläche zusammenfallen, wenn der im Satz vorgesehene Ausnahmefall eintreten soll, dass statt einer Querschnittfigur eine von $\mathfrak{E}$ bis $\mathfrak{E}'$ reichende Folge das Maximum vertritt.

12. Der gegebene Beweis ist vollständig auf Räume beliebig vieler Dimensionen übertragbar, in Folge des Satzes:

$$\Pi_i\,(\lambda\alpha_i + \lambda'\beta_i) \leqq \mathfrak{J}, \text{ wobei}$$

$$\lambda + \lambda' = 1;\ o \leqq \lambda \leqq 1; \text{ und}$$

$$\Pi_i \alpha_i = \mathfrak{J} = \Pi_i \beta_i \text{ ist}^1).$$

13. In einer Eifläche findet sich unter einer Schaar von parallelen ebenen Schnitten S ein und nur ein Maximum an Umfang, das entweder durch *einen* Schnitt oder durch *eine* stetige Folge kongruenter Schnitte gebildet ist, die einen Cylindermanteltheil bilden.

---

1) Anmerkung. Die Frage der Uebertragbarkeit bildet auch den Grund, warum wir den Beweis nicht auf die bekannten Eigenschaften einer nachher (14) zu erwähnenden speziellen Eiflächenart Ω gestützt haben. Der Inhalt eines den Deckflächen parallelen Querschnittes von Ω ist eine quadratische Funktion des Abstandes, den der Querschnitt von einer Deckfläche $\mathfrak{S}$ hat, kann somit nur ein Maximum oder Minimum zwischen zwei gleichen Werthen haben, u. s. w. Diese Einfachheit des Schlusses fällt aber bei höheren Räumen sogleich fort, weil die Schnittinhalte Funktionen des Abstandes von höherem Grade als zwei werden.

14. Man denke sich in einer Eifläche $\mathfrak{E}$ zwei parallele Schnitte S_1 und S_2 gleichen Umfangs U gefunden. An S_1 und S_2 lege man die developpable Fläche $\mathfrak{D}$ derjenigen gemeinsamen Tangentialebenen, welche je durch zwei parallele auf der nemlichen Seite liegende Tangenten von S_1 und S_2 gehen. Der zwischen S_1 und S_2 liegende Theil $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{D}$ bildet mit den Figuren S_1 und S_2 zusammen ein Eigebilde der speziellen Art $\mathfrak{Q}$. Denn ein Eigebilde ist $\mathfrak{Q}$, weil durch jeden seiner Punkte wenigstens eine Ebene geht, welche $\mathfrak{Q}$ vollständig auf einer Seite hat und Randpunkte ebenfalls nicht vorkommen.

15. $\mathfrak{Q}$ ist die kleinste Eifläche an Inhalt und Oberfläche unter denen, welche durch die Ovale S_1 und S_2 gehen, und ferner, wenn eine durch S_1 und S_2 gehende Eifläche zwischen S_1 und S_2 eine Regelfläche zur Begrenzung haben soll, so kann es nur die Regelfläche $\mathfrak{D}$ sein. Beides gilt, auch wenn S_1 und S_2 nicht gleich sind.

16. $\mathfrak{Q}$ liegt, als aus lauter geraden Strecken zwischen Punkten von S_1 und S_2 erzeugt, vollständig innerhalb $\mathfrak{E}$ (I, 9), und hat somit Schnittfiguren, welche vollständig innerhalb (oder höchstens etc. s. 9.) der durch die nemlichen Ebenen erzeugten Schnittfiguren von $\mathfrak{E}$ liegen. Da wir es nur mit Ovalen zu thun haben (I, 6), so ist auch der Umfang der innen liegenden Schnitte kleiner als der der umfangenden. Man zeigt leicht, dass ein zu S_1 und S_2 paralleler Schnitt von $\mathfrak{Q}$, M_3, ein Oval des Umfangs $\frac{S_1 + S_2}{2} = U$ ist. Der Schnitt der nemlichen Ebene mit $\mathfrak{E}$, S_3, ist daher von einem Umfange $> U$, ausgenommen den Fall, wo der Mantel $\mathfrak{M}$ auch zu $\mathfrak{E}$ gehört.

17. Um eine Anwendung unserer Sätze zu machen, benutzen wir den Körper $\mathfrak{Q}$ zum Beweise einiger Sätze „über Maximum und Minimum der Figuren“, zugleich wegen einer Berichtigung, deren mehrere Stellen in Steiners gleichnamiger (zweiter) Abhandlung bedürfen.

Ist $S_1 \sim S_2$, aber nicht ähnlich gelegen, so sind die zu den S parallelen Schnitte M von $\mathfrak{Q}$ gleichen Umfangs und grösseren Inhalts als diese. Ist S_1 ein Oval grösseren Inhalts als alle umfangsgleichen Ovale, so muss also S_2 ihm stets ähnlich liegen, wie es auch in seiner Ebene liegt. Etwas anders ausgedrückt: S_1 und S_2 müssen stets zur Deckung gebracht werden können, unter der Bedingung, dass zwei beliebige ihrer Punkte, p_1 und p_2 aufeinanderfallen. Dem genügt nur der Kreis. Derselbe ist somit das gesuchte Oval, wenn es überhaupt ein solches gibt.

18. Zu einem Satz in der Ebene fassen wir unsere Resultate folgendermassen zusammen: Construirt man zu zwei inhalts- und umfangsgleichen Ovalen in einer Ebene die Enveloppe derjenigen Geraden, welche die Entfernung zwischen zwei parallelen, auf der nemlichen Seite liegenden Tangenten beider Ovale in einem constanten Verhältniss theilen und diesen Tangenten parallel sind, so entsteht ein Oval gleichen Umfangs und grösseren Inhalts als die beiden Ovale; gleichen Inhalts nur dann, wenn die Ovale kongruent waren und ähnlich lagen.

19. In Steiner's oben angeführter Abhandlung (Ges. Werke, 2. Bd. S. 260—261) heisst es in § 19:

„Wird eine Figur von zwei parallelen Geraden AB und CD (s. Fig. 1) und von zwei beliebig geformten Linien AC und BD oder a und b begrenzt und zieht man zwischen diesen Linien Gerade xy den Grundlinien parallel, so ist der Ort ihrer Mitten z irgend eine bestimmte Linie c, welche die Fläche der Figur hälftet und welche im Allgemeinen kleiner ist als die halbe Summe der Linien a und b . . . .

Hier ist offenbar nur vergessen worden, zu bemerken, dass AC und BD so gestaltet sein müssen, dass sie von den Geraden xy je nur in einem Punkte getroffen werden. In

§ 66, wo der analoge Satz für den Raum angeführt wird, ist die Bedingung ausdrücklich erwähnt.

20. Dass dagegen dieser Bedingung in §§ 20, 21 und 66 innerhalb der Beweise gar nicht mehr gedacht wird, scheint darauf zu beruhen, dass Steiner annahm, in den behandelten Fällen es mit Gebilden zu thun zu haben, die diese Bedingung von selbst erfüllten. Dem ist aber nicht so. Wir beginnen mit § 20:

„Soll zwischen den unbegrenzten Schenkeln eines gegebenen Winkels eine Linie von gegebener Länge gleich L, aber willkürlicher Form, so gezogen werden, dass der begrenzte Raum ein Maximum sei, so kann sie nur ein Kreisbogen sein, dessen Mittelpunkt im Scheitel des Winkels liegt."

„Beweis. Sei ACB (Fig. 2) der gegebenen Winkel. Nehmen wir an, die Linie ADB habe die gegebene Länge gleich L und sei so beschaffen, dass sie den möglich grössten Raum begrenzt, so folgt zunächst, dass sie, sowie die ganze Figur CADBC, durch die den Winkel C hälftende Gerade CD in zwei congruente Hälften getheilt wird, so dass AD und BD oder a und b kongruent und namentlich $CA = CB$ ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es immer eine zweite Figur CA_1DB_1C, die jener CADBC durchaus gleich wäre, nemlich die mit ihr zusammenfiele, wenn man sie um die Gerade CD herumbewegte, so dass also die Linie $A_1DB_1 = ADB$, und einzeln $a_1 = a$, $b_1 = b$ sowie auch die Räume ADB_1 und A_1DB kongruent wären. Ferner gäbe es sodann eine Linie DE oder c, welche als Ort der Mitten aller zwischen den Linien a und b_1 mit der Grundlinie AB_1 parallel gezogenen Geraden, den Raum ADB_1 hälftete, so dass $2c < a + b_1$ oder $2c < a + b$ etc. . . . und ebenso würde der Raum A_1DB durch eine gleiche Linie $DF = c$ gehälftet."

Hier ist nun durchaus nicht bewiesen, dass die zu AB_1 parallelen Geraden die Begrenzungen a und b_1 nur in je einem Punkte treffen. Es ist vielmehr dies nicht allgemein

der Fall, wenn die Krümmung des Bogens a oder des Bogens b_1 grösser als π ist. Wir brauchen die Figur nur statt wie bei Steiner nach Art von Fig. 2a zu zeichnen. Dann geht c statt nach D zu laufen, nach einem andern Punkte D′, wo eine zu AB_1 parallele Gerade den Bogen b_1 berührt.

Analog ist es auf der andern Seite, so dass c keine geschlossene Linie mehr darstellt. Man bemerke, dass diese Art, die Bögen zu ziehen möglich ist, wie klein auch $\sphericalangle BCB_1$ gegeben sei. Allerdings führt uns die Anschauung bei kleinen Winkeln sofort darauf, dass bei dieser Bogenführung kein Maximum zu erwarten ist. Immerhin muss im Beweis etwas darüber erwähnt werden, wenn er ganz exakt sein soll.

21. Man kann denselben dadurch vervollständigen, dass man zeigt, AB muss in A und B auf AC und BC senkrecht stehen, oder wenigstens so, dass dort die Winkel im Innern der Figur spitze sind (s. den folgenden Beweis). Daraus folgt dann, weil AB jedenfalls ganz nach aussen konvex sein muss, dass die Totalkrümmung des Bogens für $ACB = \varphi < \pi$ selbst kleiner als π sein muss. Damit ist die den Beweis störende Möglichkeit der Bogengestaltung ausgeschlossen.

Beweis. Wenn man AB (Fig. 3) der Forderung entsprechend gefunden denkt, und es ist A′ ein Punkt des Bogens AB, so muss der Winkel CAA′ ein stumpfer oder ein rechter sein; denn wäre er spitz wie bei Fig. 3, so könnte durch die dort ersichtliche Konstruktion — Drehung von AA′ um A′, bis A wieder in den Winkelschenkel fällt — eine Vergrösserung des Inhalts ohne Verlängerung von AB erzielt werden.

Nun kann aber A′ beliebig nahe an A oder B angenommen werden, wodurch der Schluss von der Sehne auf das Element des Bogens in A und B ausgedehnt wird.

22. Bei § 40 ist es die nemliche Sache. Dort wird im Beweise die als gefunden supponirte Maximalfigur halbirt und um die Halbirgerade die eine Hälfte auf die Seite der

andern geklappt. Dann, sagt Steiner, müssen beide Hälften sich decken, sonst könnte man wieder eine Linie zwischen beiden andern durch die Halbirungspunkte paralleler Sehnen ziehen etc. etc.

Man kann ganz wohl eine Konvexe finden, die durch eine Gerade dem Umfang und Inhalt nach halbirt wird und bei der Umklappung doch keine parallelen Sehnen der verlangten Besonderheit zu ziehen gestattet. Man sehe Figur 4, bei deren Anordnung alle von Steiner gemachten Voraussetzungen erfüllt sein können; acsbd′ kann eine nach aussen überall konvexe Linie, adsb symmetrisch zu ad′b, Bogen acsb kann gleich Bogen adsb, Inhalt acsb gleich Inhalt adsb sein, während doch zugleich die Totalkrümmung des Bogens $acs > \pi$ ist, und somit keine Parallelenrichtung existirt, welche eine ununterbrochene Linie der Halbirpunkte zwischen beide Bögen zu legen verstattete. Hier lehrt uns auch die Anschauung nichts; man kann statt der gezeichneten Figur konvexe Linien zeichnen mit der nemlichen Eigenschaft, die sich einem Kreise in Gestalt beliebig nähern.

23. Man wird nun nach einem Blick auf § 60, den ersten Beweis von der Kugel, keinen Zweifel mehr haben, dass dort die nemliche Lücke sich findet, nur dass sie vielleicht nicht so einfach auszufüllen ist, wie in den vorhergehenden Fällen.

24. Es sei uns gestattet, noch darauf hinzuweisen, dass für den Beweis von § 20 bei Steiner auch unser Satz 18. verwendet werden kann, worauf, nur unter Ersatz der Mittellinie durch eine andere, der Beweis sich ganz in dem von Steiner intendirten Sinne gestaltet.

Wir konstruiren die bei 18. vorgeschriebene Enveloppe für die beiden Ovale $AabBC$ und $A_1a_1b_1BC$ (Fig. 2.); dieselbe ist jedenfalls auch ein Sektor $\mathfrak{S}$ des gegebenen Winkels, überspannt von einem in E und F aufstehenden Bogen d. Der Umfang von $\mathfrak{S}$ ist gleich dem der beiden ersten Sektoren. folglich $d = L$, der Inhalt ist grösser als bei jenen etc.

25. Im Raume lässt sich zwar in Folge von 12. behaupten:

— Konstruirt man zu zwei inhaltsgleichen Eiflächen die Enveloppe derjenigen Ebenen, welche die Entfernung zwischen zwei parallelen, auf der nemlichen Seite liegenden Tangentialebenen beider Eiflächen in einem konstanten Verhältniss theilen und diesen Tangentialebenen parallel sind, so entsteht eine Eifläche grösseren Inhalts als die beiden gegebenen Eiflächen —:

26. Aber zum Beweise der Maximaleigenschaft der Kugel lässt sich dieser Satz nicht verwenden. Denn nehmen wir die gegebenen Eiflächen nun auch noch oberflächengleich an, so ist die konstruirte Eifläche denselben im Allgemeinen jedenfalls nicht oberflächengleich, sehr wahrscheinlich sogar immer von grösserer Oberfläche[1]); und es ist auch jedenfalls nicht so, dass für die mittlere Eifläche das Verhältniss $\frac{\mathfrak{J}^2}{\mathfrak{O}^3}$ ($\mathfrak{J}$ = Inhalt, $\mathfrak{O}$ = Oberfläche) ein grösseres wäre, als für die gegebenen Eiflächen. Dies lehren Beispiele.

Wir beweisen nun noch einen Satz für eine spezielle Art von Eigebilden.

27. In einem Oval, das ein Centrum hat, — einen Punkt, in dem alle durchgehenden Sehnen halbirt werden — und keine geraden Stellen aufweist, gibt es ausser dem Centrum keinen Punkt, in dem mehr als *eine* durchgehende Sehne halbirt wäre. Findet man also einen Punkt, in dem *zwei* durchgehende Sehnen halbirt sind, so muss er das Centrum sein.

Beweis: Wenn es einen Punkt p gäbe, der zwei Sehnen halbirt, so liesse sich auf der andern Seite des Centrums ein

1) Wenn die gegebenen Eiflächen nicht kongruent sind und ähnlich liegen.

Punkt p′ finden, bei dem es in kongruenter Weise stattfindet (Fig. 5). Das Oval würde dadurch vier gleichlange parallele Sehnen: z. B. ac, bd, a′c′, b′d′ erhalten, deren Endpunkte nicht auf zwei Geraden liegen können, ohne dass das Oval gerade Strecken enthält; wenn aber ein Oval mehr als zwei gleiche parallele Sehnen hat, müssen ihre Endpunkte auf zwei Geraden liegen (lässt sich aus I, 10 folgern.) Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn p und p′ mit dem Centrum zusammenfallen.

Anm. Wenn das Oval gerade Strecken enthält, so gibt es Strecken durch das Centrum, parallel den geraden Strecken des Ovals und von gleicher Länge, halbirt durch das Centrum, in deren Punkten mehr als eine Sehne halbirt wird.

Für die Uebertragung des Satzes auf Eiflächen benöthigen wir des folgenden Hilfssatzes:

28. Sind in einem Tetraëder[1]), $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zwei inhaltsgleiche Schnittfiguren, deren Ebenen parallel sind (untereinander und) zu zwei Gegenkanten von $\mathfrak{T}$, K und K′, und man legt durch zwei parallele und auf der nemlichen Seite liegende Seiten ag und a′g′ von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zwei Schnitte $\mathfrak{V} \# \mathfrak{V}'$, nicht $\# \mathfrak{S}$, so ist diejenige der beiden Schnittfiguren $\mathfrak{V}$, welche in den Raum zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ eindringt, (die „innere“) die grössere.

Wir nehmen K | K′; der allgemeine Fall lässt sich aus dem speciellen leicht erledigen und ist uns gar nicht von Nöthen. Fig. 6 ist eine Parallelprojektion des ganzen Gebildes auf die Ebene von S. Wir untersuchen das Inhaltsverhältniss der Projektionen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ (gestrichelte Begrenzung), welches dem von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ gleich ist.

Setzen wir $ag = \gamma$; $ah = \eta$; $a'g' = \gamma'$; $a'h' = \eta'$ so ist: $\mathfrak{S} = \gamma . \eta$; $\mathfrak{S}' = \gamma' . \eta'$; und es sei $\gamma < \gamma'$; $\eta' < \eta$.

1) Im Sinne eines Körpers, Kanten und Flächen unverlängert.

Der von γ' ausgehende Schnitt $\mathfrak{V}'$ sei der innere. Wäre $\mathfrak{V}$ der innere Schnitt, so wäre der Beweis, weil für jede Grösse des Winkel $(\mathfrak{S}\mathfrak{V})$ derselbe, einfacher.

1) K wird von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ nicht getroffen. $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ erhält man aus den Rechtecken abcg und a′b′c′g′ durch Abzug der schraffirten Dreieckspaare.

$abcg = a'b'c'g'$; denn

$ab : a'b' = \eta : \eta' = \gamma' : \gamma$. Für zwei entsprechende abzuziehende Dreiecke gilt:

$$abd : a'b'd' = \eta^2 : \eta'^2 = \gamma'^2 : \gamma^2 > 1;$$
$$abe : a'b'e' = \eta^2 : \eta'^2 = \gamma'^2 : \gamma^2 > 1;$$

also $abcg - abd - abe < a'b'c'g' - a'b'd' - a'b'e'$.

oder $\mathfrak{W} < \mathfrak{W}'$

$\mathfrak{V} < \mathfrak{V}'$.

2) K wird von $\mathfrak{V}$ geschnitten, von $\mathfrak{V}'$ nicht. Fig. 7. $\mathfrak{V}$ ist jetzt statt eines Trapezes ein Dreieck. Man verlängere seine Seiten über s hinaus bis zu den Schnitten e und d mit den in der Figur seitlichen Kanten des Tetraeders. Die Höhe von e und d über γ verhält sich zur Höhe von $\mathfrak{V}'$ wie η zu η'.

Daher ist $\measuredangle adg = \measuredangle a'd'g'$ aber

$\measuredangle adg > \measuredangle asg$

$\measuredangle a'd'g' <$ Trap. a′d′e′g′, daher

$\measuredangle asg <$ Trap. a′d′e′g′ oder

$\mathfrak{W} < \mathfrak{W}'$

$\mathfrak{V} < \mathfrak{V}'$

3) K wird von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ geschnitten. Dann sind $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ ähnliche Dreiecke, γ und γ' entsprechende Seiten, also

wegen $\gamma < \gamma'$ auch wieder

$\mathfrak{V} < \mathfrak{V}'$. q. e. d.

29. In einer Eifläche $\mathfrak{E}$, die ein Centrum c und keine geraden Stellen besitzt, gibt es durch jede Gerade G, die zwei Punkte mit $\mathfrak{E}$ gemein hat und c nicht enthält, nur *eine* und immer *eine* Schnittebene $\mathfrak{A}$, deren Schnittfigur durch G dem Inhalte nach halbirt wird. Daraus folgt:

29a. Wenn eine Sehne in einer Centraleifläche gefunden ist, welche zwei, sie enthaltende, ebene Schnittfiguren halbirt, so geht sie durch das Centrum (ist ein Durchmesser).

30. Beweis: Es muss immer eine solche $\mathfrak{A}$ durch eine gegebene G geben. Denn eine beliebige durch G gehende Ebene, deren Schnittfigur zwei durch G getrennte Theile $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ aufweist, führt, wenn man sie 180 Grad um G dreht, den Theil $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{T}_1$ *stetig* (I, 27.) über, durch gewisse Mittellagen $\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{T}'_2$. Der Quotient $\mathfrak{T}'_1 : \mathfrak{T}'_2$ geht also stetig vom Werthe $\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{T}_2$ zu dem Werthe $\mathfrak{T}_2 : \mathfrak{T}_1$ über, und muss dabei die Einheit passiren. An dieser Stelle ist $\mathfrak{T}'_1 = \mathfrak{T}'_2$.

Dass aber die Einheit nicht *öfter* als *ein* Mal passirt wird, ist zunächst nicht evident.

Ehe wir in den Beweis eintreten, bemerken wir:

31. Bei einer Centralfläche kann aus einem auf ihr liegenden Punkte mittels des Centrums stets ein zweiter ihr angehöriger, aus irgend einem auf ihr liegenden Gebilde stets ein zweites auf ihr liegendes in der „*Wechsellage*“ abgeleitet werden, das zum ersten symmetrisch sich erweist, wenn man es unter Festhaltung einer Centralebene und des Centrums um 180 Grad dreht.

32. Wir zeigen nun, dass die Annahme, durch G ginge ausser $\mathfrak{A}$ noch eine zweite halbirte ebene Schnittfigur $\mathfrak{B}$, auf Widersprüche führt. (Fig. 8.)

Zu unsern beiden Schnittfiguren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch G leiten wir sofort zwei symmetrische in der Wechsellage, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$, durch G′ ab.

Wir betrachten von diesem Figurensystem nur den auf einer Seite (oberhalb) der Centralebene $(GG') = \mathfrak{G}$ liegenden Theil, und es gelten fortan auch die Bezeichnungen der Figuren nur für die obern Theile.

Von den beiden Figuren $\mathfrak{B}$ wird eine, $\mathfrak{B}'$, in den zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ liegenden Raum eindringen, die andere, $\mathfrak{B}$, nicht.

33. (Fig. 9.) Wir theilen die beiden Schnittfiguren $\mathfrak{A}$ durch Gerade $G_\nu \# G$ in Elementarstreifen, die wir rechteckig begrenzt annehmen, ausser durch die G durch gewisse Strecken U (vorn) und $\bar{U}$ (hinten); und zwar $\mathfrak{A}$ von unten ausgehend nach oben zu in die Streifen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_z$; $\mathfrak{A}'$ entsprechend in $\mathfrak{G}'_1, \mathfrak{G}'_2, \ldots . \mathfrak{G}'_z$. Dabei machen wir dem Inhalte nach

$$\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}'_\nu .$$

34. Zwei entsprechende $\mathfrak{G}$ sind, um es kurz auszudrücken, durch ein Tetraëder t verbunden; t_ν z. B. ist begrenzt durch die Ebenen $G_{\nu-1}$ und G_ν, U_ν und $\bar{U}_\nu$.

t_z wird nach oben durch die Tangentialebene von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, G_z, begrenzt, welche die beiden Tangenten G_z und G'_z miteinander verbindet.

35. Die t bilden einen theilweise treppenförmig begrenzten Körper r, dessen drei durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ getrennte Theile wir, in der Figur von rechts nach links gehend mit r^0, r', r'' bezeichnen.

36. Theile des Raumes, die von mehreren t getroffen werden, werden zu einfach erfüllten, wenn man eine genügende Anzahl t kappt, was unsre folgenden Schlüsse nicht beeinträchtigt, sondern nur verstärkt. (s. Vorschrift 42).

37. Analog der Bezeichnung r^0, r', r'' sind im Folgenden noch eine Reihe von Bezeichnungen: e^0, e', e'', t^0, t', t'' u. s. w. — zu verstehen. (Fig. 11).

38. Jedes t hat eine horizontale Kante, $H \# G$, und eine derselben gegenüberliegende vertikale, K. Die H können

$\mathfrak{E}$ durchsetzen, ihre Endpunkte h_ν und $\bar{h}_\nu$ (folgt aus I) aber liegen immer ausserhalb $\mathfrak{E}$. (Fig. 10.)

Die unverlängerten K dagegen liegen ganz ausserhalb $\mathfrak{E}$, oder wenigstens ausserhalb des später für $\mathfrak{E}$ substituirten treppenförmig begrenzten Körpess $\mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{t}}$ (44).

39. Bezeichnen wir mit e^0, e', e'' die drei Theile der vollen Eifläche $\mathfrak{E}$, so lässt sich nachweisen, dass e^0 ein Theil von r^0, e'' ein Theil von r'' ist, während ersichtlich r' ein Theil von e' ist.

40. Denn betrachten wir das System von Geraden und Punkten (Fig. 12):

$$\underline{A},\ \underline{B},\ G,\ g,\ \underline{A}',\ \underline{B}',\ G',\ g'$$

das auf einer zu G normalen Ebene $\mathfrak{N}$ durch unsere Ebenen und Geraden

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{G},\ G,\ \mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{G}',\ G'$$

als senkrechte Projektion erzeugt wird.

Die G umhüllen eine Enveloppe $\underline{E}$, von der kein Punkt in dem mittleren Raume (') liegt[1]).

Wir denken uns $\underline{E}$ durch eine bewegte Gerade, die von G nach G_z übergeht, beschrieben.

41. Bezeichnen wir die erste Asymptotenlage der bewegten Geraden mit $\underline{G_a}$, die zweite mit G_b u. s. w. Wenn

1) Anm. Zur Beschreibung dieser Enveloppe E diene:

E hat weder Wendepunkte noch Schnabelspitzen. Dagegen kann sie Doppelpunkte und gewöhnliche Spitzen, sowie diesen Spitzen verwandte Ecken in beliebiger Anzahl und Komplikation besitzen. Wenn sie vom Raume (°) in den Raum (''), oder umgekehrt, übertritt, so geschieht dies an einer Asymptote, im Unendlichen. Es geschieht dies jedenfalls immer dann, wenn eine erzeugende Tangente den Drehungssinn im Endlichen ändert. Wenn sich die Kurve nicht auf den Schnittpunkt von G mit G_z reduzirt, so muss sie in einer der Arten beginnen, wie es in den Figuren 12a und 12b durch ε und ε' angedeutet ist (mit übertriebener Krümmung). Ausser in dem bei 12b durch ε' gegebenen Falle wird die Kurve im weitern Verlauf nothwendig eine Spitze haben. (Bei Fig. 12a und 12b sind die Striche fälschlich über die Buchstaben gesetzt).

keine Asymptotenlage vorhanden ist, gehen wir sofort zu G_z über. Denken wir uns ferner an der bewegten Tangente nur immer die *eine* Hälfte aktiv und zwar diejenige, welche $\underline{A}$ und $\underline{A}'$ schneidet.

Man überzeugt sich, dass diese Halbtangente auf ihrem Weg von G bis G_a alle Punkte desjenigen Halbwinkelraumes zwischen beiden Geraden, den Stücke von $\underline{A}$ und $\underline{A}'$ überspannen, bestrichen hat[1]). Von G_a bis G_b bestreicht die $\underline{A}$ und $\underline{A}'$ treffende Halbtangente der nun auf der andern Seite verlaufenden Enveloppe wieder alle Punkte des analog wie oben zu bestimmenden Halbwinkelraumes etc. So fortfahrend, erkennt man, dass die bewegte Halbtangente in der Endlage G_z angekommen, alle Punkte von $\underline{\mathfrak{W}}$ mindestens *ein* Mal überstrichen haben muss.

$\underline{\mathfrak{W}}$ $(= \underline{\mathfrak{W}}^0 + \underline{\mathfrak{W}}' + \underline{\mathfrak{W}}'')$ ist der $\underline{A}$ und $\underline{A}'$ enthaltende Halbwinkelraum $(\underline{G}\ \underline{G}_z)$.

42. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Raum $(^0)$. Es werden in $\underline{\mathfrak{W}}^0$ im Allgemeinen mehrfach bedeckte Stellen vorkommen; wir stellen eine einfache Bedeckung her, indem wir, etwa von unten nach oben gehend, von dem Halbwinkelraume zwischen zwei Folgelagen der Halbtangente immer nur das Stück als existent betrachten, das noch nicht bestrichene Stellen trifft.

43. Alles über das unterstrichene System von Geraden und Punkten in $\mathfrak{N}$ Gesagte überträgt sich auf unser räumliches System von Ebenen und Geraden.

Es ist sowohl $\mathfrak{w}^0$, als $\mathfrak{e}^0$ in Schichten getheilt und erschöpft, und die Schichten sind ebenfalls in der Weise abgegrenzt, dass die Erschöpfung nur eine einmalige ist.

44. Die erstern Schichten, insofern sie noch seitlich durch die Ebenen $\underline{\mathfrak{U}}_\nu$ und $\underline{\mathfrak{U}}_\nu$, die letztern, insofern sie noch durch $\mathfrak{E}$ selbst vervollständigend begrenzt werden, bezeichnen

1) Ausserdem im Allgemeinen noch andere gleichgiltige.

wir resp. mit $\mathfrak{w}_\nu^\varrho$ und $\mathfrak{t}_\nu^\varrho$ (die $\mathfrak{w}_\nu^\varrho$ bilden zusammen $\bar{\mathfrak{r}}^0$); die $\mathfrak{t}_\nu^\varrho$ ersetzen wir schliesslich noch durch gewisse cylindrische Schichten $\bar{\mathfrak{t}}_\nu^\varrho$ mit vertikalen Seiten über dem Schnitt von $G_{\nu-1}$ mit $\mathfrak{E}^0$, wodurch für $\mathfrak{e}^0$ ein theilweise treppenförmig begrenzter Körper $\bar{\mathfrak{e}}^0$ substituirt wird, der sich nach Lage und Inhalt von $\mathfrak{e}^0$ nur um hier irrelevante kleine Grössen unterscheidet. Natürlich ist auch die Ausdehnung der $\bar{\mathfrak{t}}^0$ von der über die Ausdehnung der Schichten (42.) getroffenen Anordnung abhängig.

45. Jetzt liegt jede Schicht $\mathfrak{t}_\nu^\varrho$ ganz innerhalb $\mathfrak{w}_\nu^\varrho$. Beide Schichten haben die $\mathfrak{G}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{G}_\nu$ gemeinsam und senkrechte Mäntel über ihren Grundrissen in $\mathfrak{G}_{\nu-1}$. Die folgenden (Arten der) Grundrisskombinationen können vorkommen[1]): Fig. 13a, 13b, 13c; a tritt ein, wenn die vertikale Kante K_ν in $\mathfrak{w}_0$ liegt; b und c treten ein, wenn die horizontale Kante H_ν in $\mathfrak{w}_0$ liegt. Im Fall a liegt kein Punkt von $\mathfrak{t}_\nu^\varrho$ in dem Theile $\mathfrak{v}_\nu^\varrho$ von $\mathfrak{w}_\nu^\varrho$ der, von $\mathfrak{A}$ aus gerechnet, über K_ν hinausliegt. Die $\mathfrak{w}_\nu^\varrho$, ohne die $\mathfrak{v}_\nu^\varrho$, sind aber nichts andres als die $\mathfrak{t}_\nu^\varrho$. (34). Somit liegt das Konglomerat der $\mathfrak{t}^0$, für welches wir $\mathfrak{e}^0$ setzen dürfen, ganz innerhalb des Konglomerates der theilweise sogar noch gekappten $\mathfrak{t}^0$. — Im Raum ($''$) ist alles analog.

Nun ist der Weg zur Anwendung unsres Hilfssatzes gebahnt.

46. Rufen wir uns zunächst ins Gedächtniss, dass innerhalb $\mathfrak{r}'$ keine Ueberdeckungen von $\mathfrak{t}$ vorkommen, sondern nur in $\mathfrak{r}^0$ (und $\mathfrak{r}''$), ein Umstand, welcher die folgenden Schlüsse nur verstärkt.

47. Indem wir dann die Elementartrapeze, ev. in $\mathfrak{B}$ deren Rudimente, nach welchen die $\mathfrak{t}_\nu$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ geschnitten werden, resp. mit $\mathfrak{y}_\nu$ und $\mathfrak{y}'_\nu$ bezeichen, und gewisse andre trapezförmige Schnitte (oder Schnittrudimente), welche

1) In ungekappten $\mathfrak{w}$, in gekappten können Stücke fehlen, was unsere Schlüsse nicht beeinträchtigt.

resp. durch $G_{\nu-1}$ und $G'_{\nu-1}$ geführt sind, mit $\overline{\mathfrak{y}}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{y}}'_\nu$[1]) — Fig. 14 — können wir sagen:

48. Nach dem Hilfssatz ist jedes $\overline{\mathfrak{y}}'_\nu > \overline{\mathfrak{y}}_\nu$.

Sind die t gekappt, wodurch sie übrigens immer noch Eiflächen bleiben, so ist dies um so mehr der Fall. Nun kann nach 13. t_ν als Eifläche unter allen zu $\mathfrak{B}$ parallelen ebenen Schnittfiguren nur *ein* Maximum an Inhalt aufweisen. Dasselbe muss entweder mit $\overline{\mathfrak{y}}_\nu$ auf verschiedenen Seiten von $\overline{\mathfrak{y}}'_\nu$ liegen, oder, wenn auf der nemlichen, zwischen $\overline{\mathfrak{y}}'_\nu$ und $\overline{\mathfrak{y}}_\nu$.

In beiden Fällen sind sämmtliche Schnittfiguren der erwähnten Art, welche zwischen $\overline{\mathfrak{y}}'_\nu$ und $\overline{\mathfrak{y}}_\nu$ liegen, grösser als irgend eine Schnittfigur d. e. A., welche mit $\overline{\mathfrak{y}}'_\nu$ nicht auf einer Seite von $\overline{\mathfrak{y}}_\nu$ liegt.

Daher muss auch $\mathfrak{y}'_\nu > \mathfrak{y}_\nu$ sein.

Ebenso ist

$$\Sigma \mathfrak{y}'_\nu > \Sigma \mathfrak{y}_\nu.$$

49. Das Konglomerat der $\mathfrak{y}'_\nu$ ist aber der Schnitt von $\mathfrak{B}'$ mit dem Konglomerat der t, das der $\mathfrak{y}_\nu$ ist der Schnitt von $\mathfrak{B}$ mit dem der t.

50. Wenn nun, wie zuerst angenommen werden soll, $\mathfrak{B}'$ die Figur $\mathfrak{A}$ nicht schneidet, so fällt $\Sigma \mathfrak{y}'_\nu$ ganz in den Theil $\overline{r}'$, dieser aber liegt ganz innerhalb $\overline{e}'$, und es ist somit $\Sigma \mathfrak{y}' < \mathfrak{B}'$. Dagegen enthält $\overline{r}^0$ vollständig den Eiflächentheil $\overline{e}^0$ und also ist $\Sigma \mathfrak{y} > \mathfrak{B}$.

51. Man sieht, dass die anfänglich gemachte Annahme $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ mit dieser Folge von Ungleichheiten:

$$\mathfrak{B}' > \Sigma \mathfrak{y}' > \Sigma \mathfrak{y} > \mathfrak{B}$$

unverträglich ist.

52. Nun kann aber $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}$ in einer Geraden G_b[2]) schneiden; wir zerlegen dann unsere Halbeifläche durch die Ebene

1) Wo alle diese Schnitte sich auf die unverlängerten t beziehen.

2) Hat nichts mit der früheren Asymptotenlage G_b zu thun.

$\mathfrak{G}_b$ in zwei neue Eiflächen (von der speziellen Art theilweise ebener Begrenzung); die eine, in der Fig. 15 die untere, lässt eine Anwendung des Satzes, soweit er bis jetzt bewiesen ist, zu; in der obern nehmen wir einen neuen zu $\mathfrak{B}$ parallelen Schnitt durch die Gerade G'_b zu Hilfe, der nun auch wieder $\mathfrak{A}$ nicht schneidet, in welchem Falle der Beweis sofort zu Ende geführt werden kann — oder $\mathfrak{A}$ nach G_c schneidet, in welchem Falle eine abermalige Theilung durch die Ebene $\mathfrak{G}_c$ und überhaupt Wiederholung der Konstruktion nöthig wird.

53. Der bessern Uebersichtlichkeit wegen führen wir eine Figur 16 mit neuer Bezeichnung ein. $\mathfrak{B}$ bleibt, $\mathfrak{B}'$ wird mit I, die successive zu $\mathfrak{B}$ parallel gezogenen Hilfsschnittebenen werden mit II, III, IV, . . . (N—1), N, eine beliebige der letzteren mit M bezeichnet. Die theilenden Ebenen $\mathfrak{G}$ heissen $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{G}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{G}_{\mathrm{III}}$, . . . $\mathfrak{G}_{\mathrm{N}}$. Diejenigen Theile der zu $\mathfrak{B}$ parallelen Schnittfiguren, welche zwischen $\mathfrak{G}_{\mathrm{M}-1}$ und $\mathfrak{G}_{\mathrm{M}}$ liegen, erhalten den Index m (arabische Ziffern).

N ist der oberste Hilfsschnitt, dessen Figur die Figur $\mathfrak{A}$ nicht mehr schneidet.

54. Man kann bei der endlichen Entfernung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ und der endlichen Dimension dieser Figuren, sicher immer ein solches N erreichen, da ja auch der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ ein endlicher sein muss.

55. Es war

$$\mathfrak{B}_1 < \mathrm{I}_1.$$

Aus den nemlichen Gründen ist

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_2 &< \mathrm{II}_2 \\ \mathrm{II}_3 &< \mathrm{III}_3 \\ \mathrm{III}_4 &< \mathrm{IV}_4 \\ &\vdots \quad \vdots \\ (\mathrm{N}-1)_n &< \mathrm{N} \end{aligned}$$

Auf Grund des Satzes ist ferner allgemein:

1) $\mathrm{M}_m > (\mathrm{M}-1)_m > (\mathrm{M}\ \ 2)_m \ldots > \mathrm{II}_m > \mathrm{I}_m > \mathfrak{B}_m.$

Mittels dieser Ungleichungen wieder leitet man aus der Annahme

$$\mathfrak{B} = \mathrm{I} = \mathfrak{B}'$$

die Ungleichung

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1 > \mathrm{I} - \mathrm{I}_1, \quad \text{allgemein}$$

$$2)\ \mathfrak{B} - \sum_{1}^{m} \mathfrak{B}_\varkappa > \mathrm{I} - \sum_{1}^{m} \mathrm{I}_\varkappa > \mathrm{II} - \sum_{2}^{m} \mathrm{II}_\varkappa > \mathrm{III} - \sum_{3}^{m} \mathrm{III}_\varkappa \ \ldots > \mathrm{M}$$

($\varkappa$ Summationsbuchstabe)

ab.

Die Reihe von Ungleichungen 2) garantirt, dass auch das letzte $\mathfrak{S}$ noch sämmtliche M schneidet.

Wenn nun aber $\mathrm{M} = \mathrm{N}$ und $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ wird (eine obere $\mathfrak{S}$-Ebene $\mathfrak{S}_N$ ist dann nicht mehr vorhanden), so ist die Reihe 1) das gerade Gegentheil der Reihe 2).

56. Die Annahme

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$$

führt also auf etwas absurdes. Dieselbe Absurdität ergibt sich, wenn

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{B}'$$

angenommen wird.

Es ist also nothwendig

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'.$$

Der Gedanke, welcher durch die Auswahl der Sätze im III. Theil zum Ausdruck gebracht werden sollte, war folgender: „Es gibt eine Reihe von Sätzen in der Ebene, bezüglich auf Längen von Linien, welche eine Uebertragung in den Raum gestatten, indem an Stelle der Linienlängen Flächeninhalte treten."

Ich hoffe mit der Zeit nachweisen zu können, dass diese Entsprechung bei Ovalen und Eiflächen eine noch allgemei-

nere ist, als die wenigen gegebenen Sätze andeuten. Es schliessen sich hier Aufgaben an, die ebenso einfach in der Fragstellung als schwierig in der Lösung sind. Möge man es mir zu Gute halten, dass ich einstweilen auf diesem Wege nicht weiter vorgedrungen bin.

Die Arbeit im Ganzen aber möchte zeigen, dass sich auch über geometrische Gebilde von ungemein wenig spezialisirtem Bildungsgesetz immerhin noch einiges nicht ganz auf der Hand liegende aussagen lässt.

II

Fig. 1

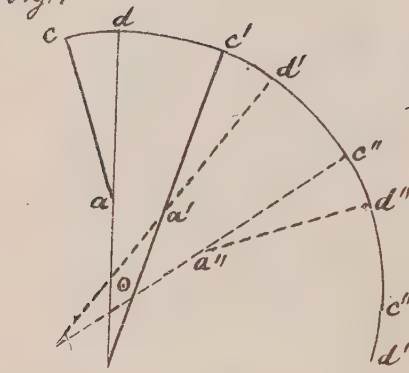


Fig. 6

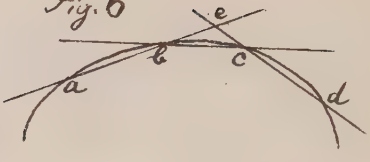


Fig. 3

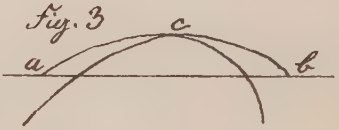


Fig. 4

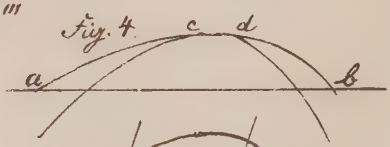


Fig. 2

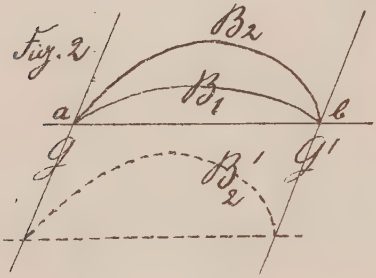


Fig. 5

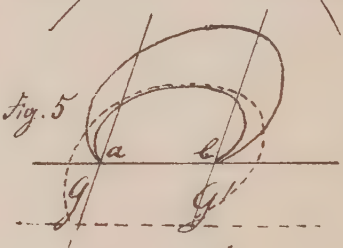


Fig. 7.

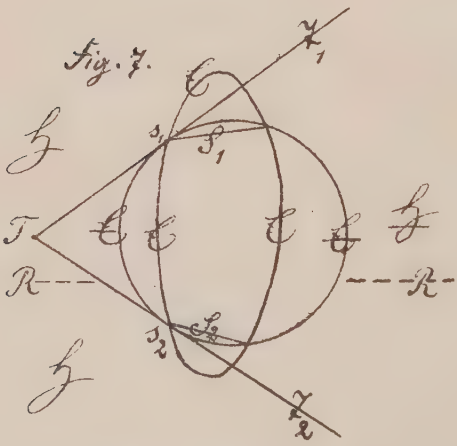
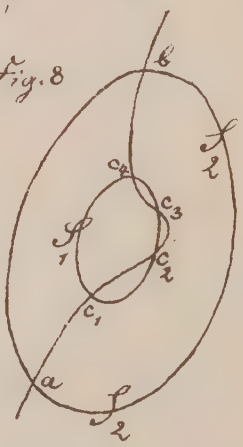


Fig. 8



NB. Die Figuren sind für jedes Kurvital besonders numeriert.

III

Fig. 2

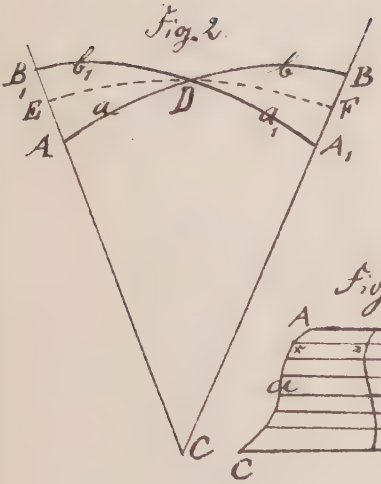


Fig. 2a

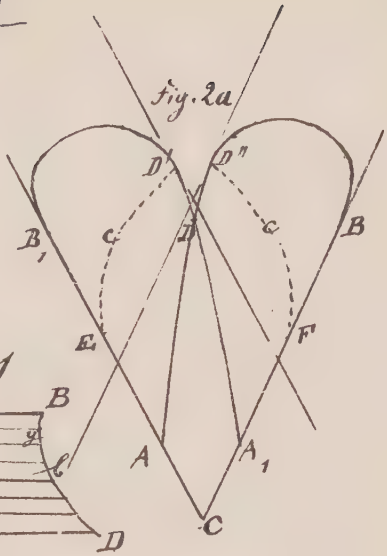
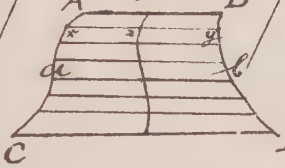


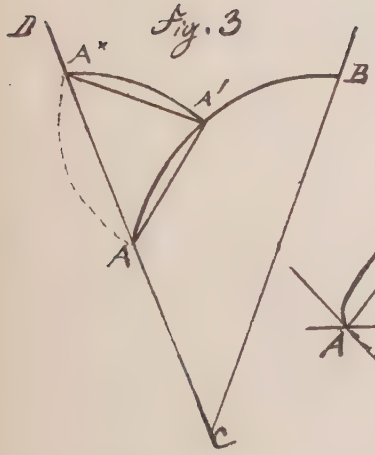
Fig. 1



Loxy. $B_1D' =$ Loxy. $BD'' = \pi$

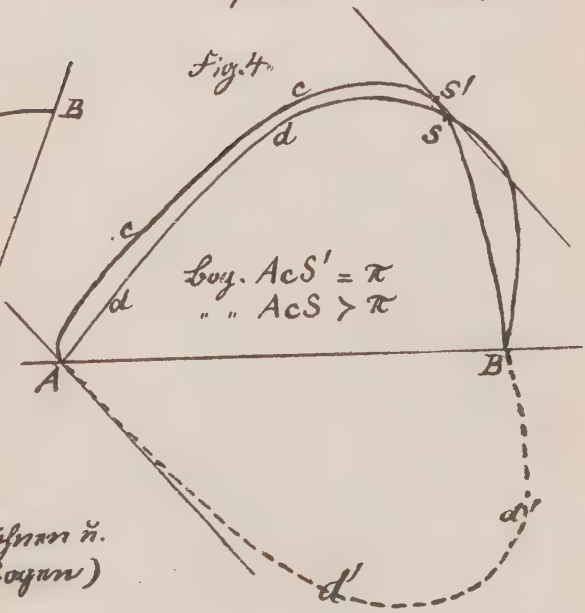
$B_1D'D =$ $BD''D > \pi$

Fig. 3



$AA' = A''A'$ (Führen u. Bogen)

Fig. 4



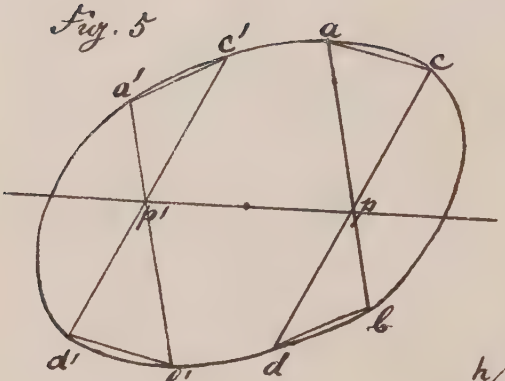
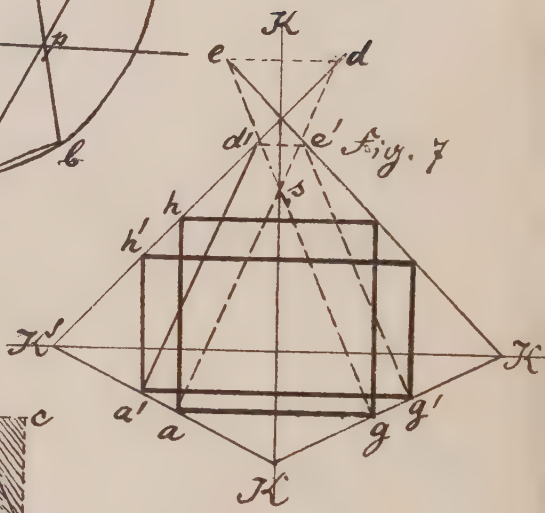


Fig. 5
c'
a
c
a'
p'
p
b
d'
b'
d


K
e
d
d'
e'
Fig. 7
s
h
h'
K'
K
a'
a
g
g'
K

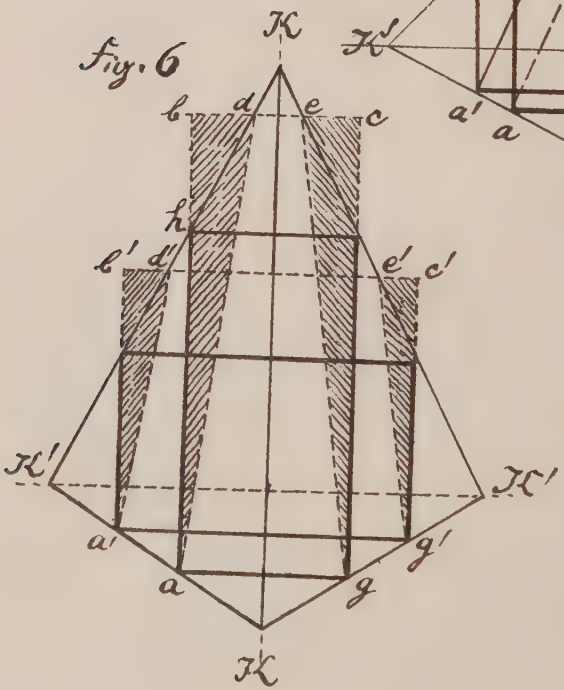


Fig. 6
K
b
d
e
c
h
b'
d'
e'
c'
K'
K'
a'
g'
a
g
K

Fig. 8

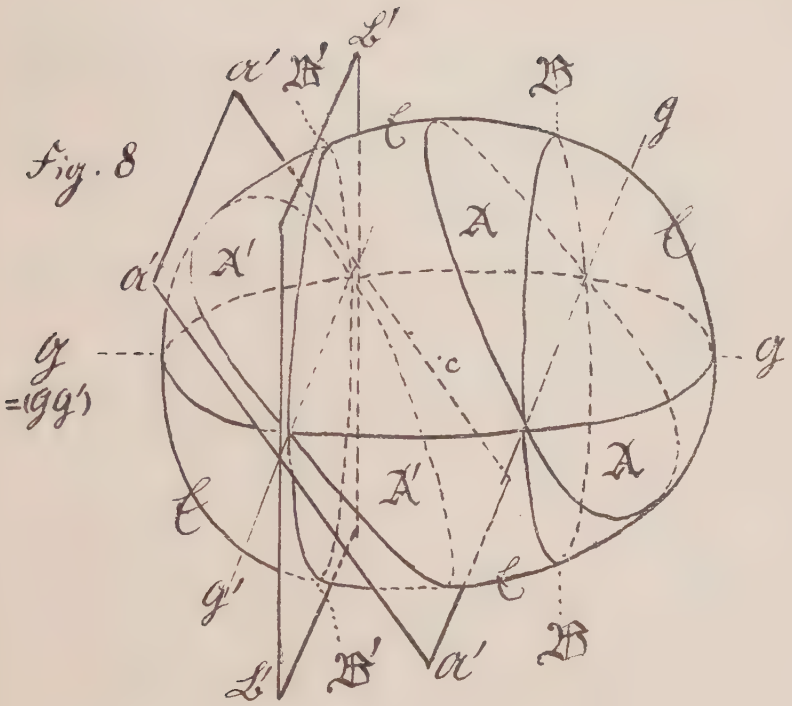


Fig. 9

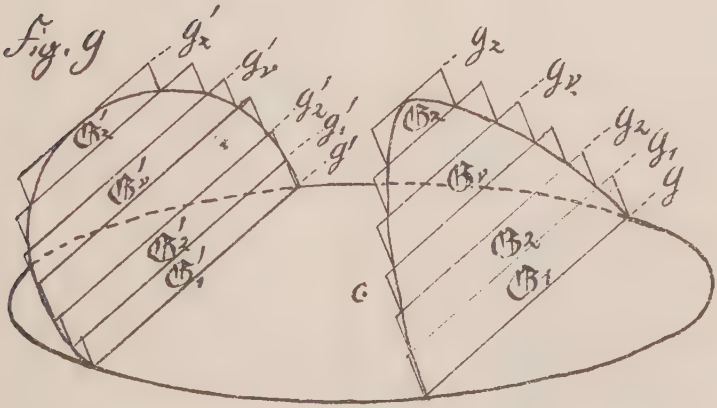


Fig. 10

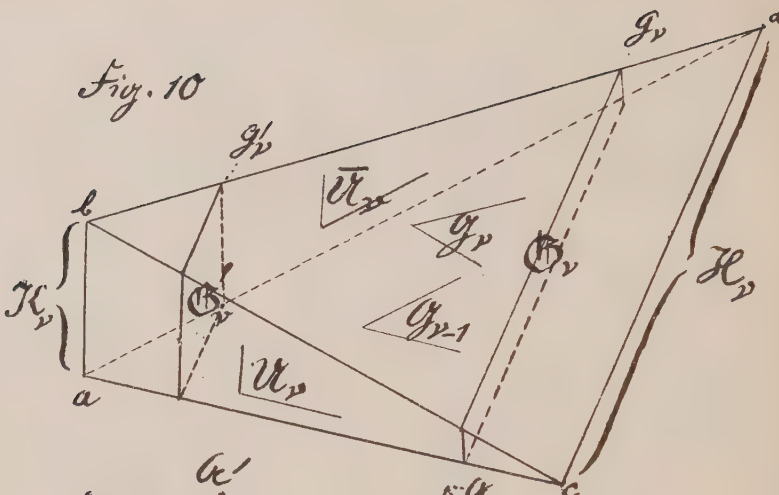


Fig. 11

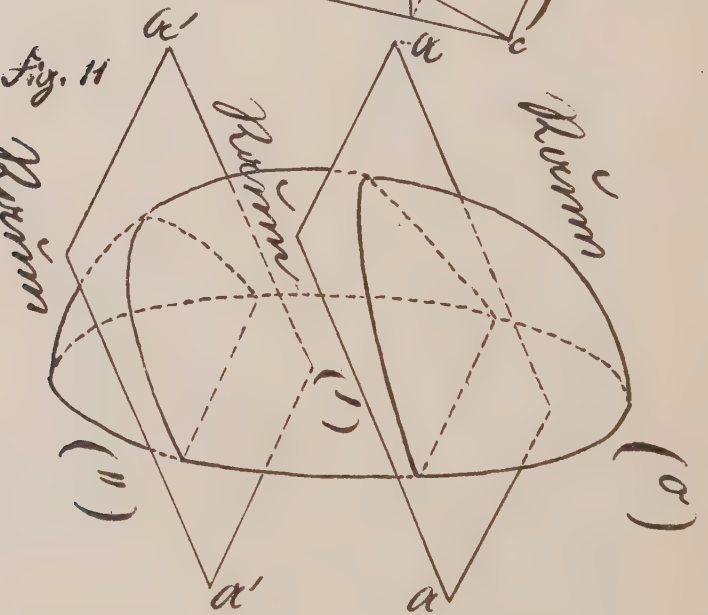
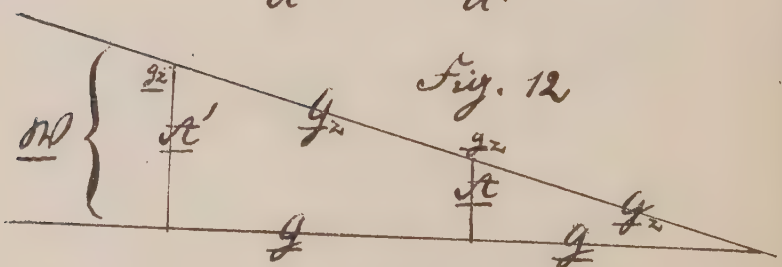


Fig. 12



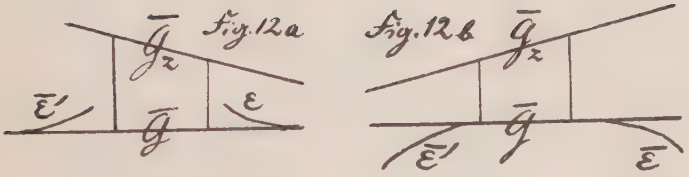


Fig. 13

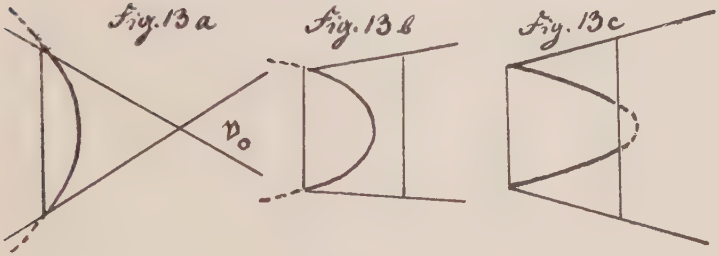
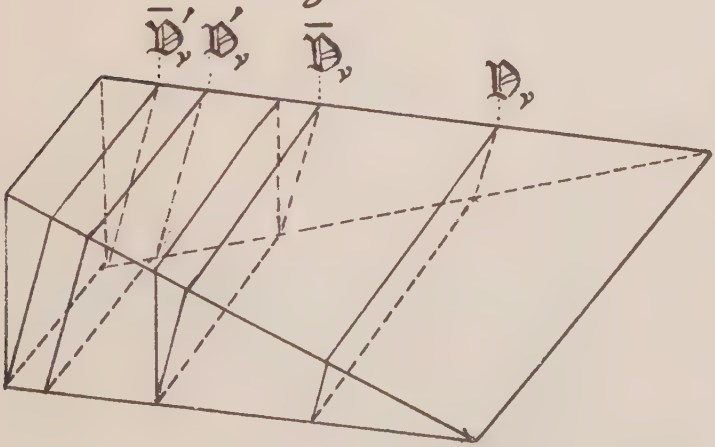


Fig. 14



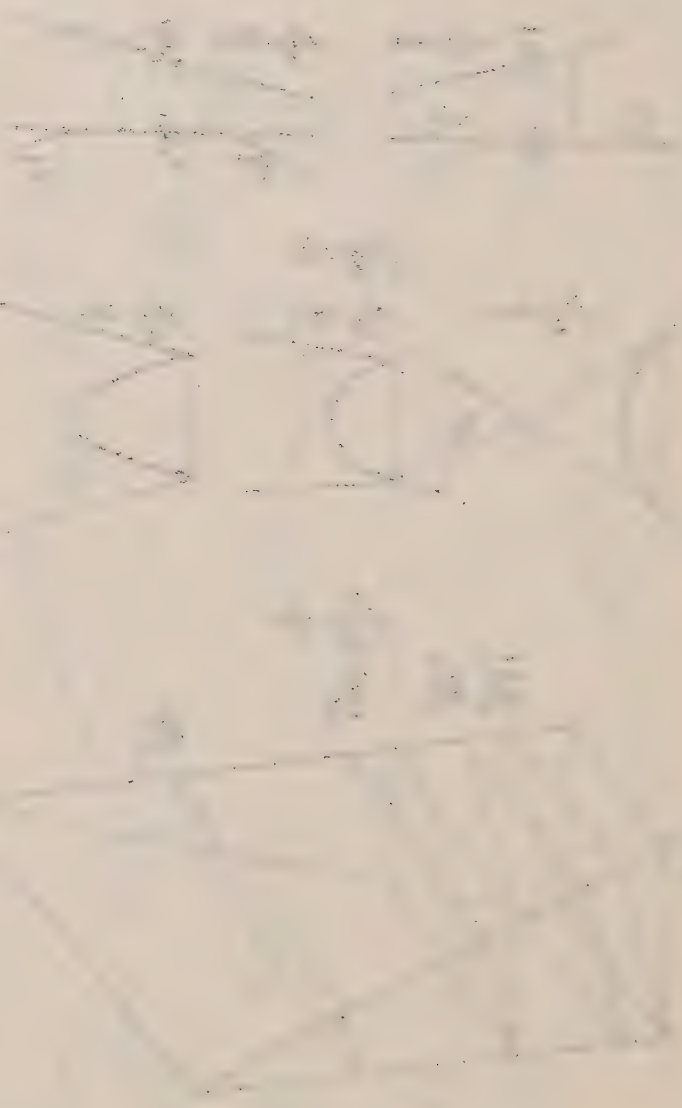


Fig. 15

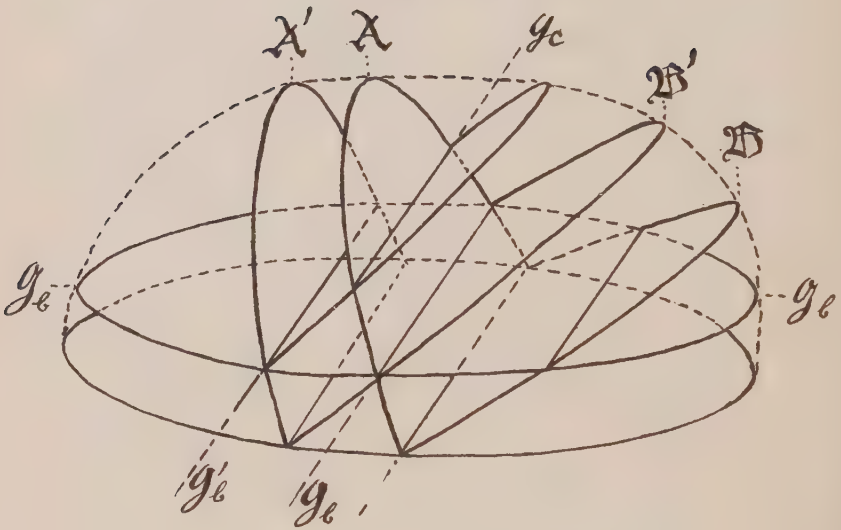
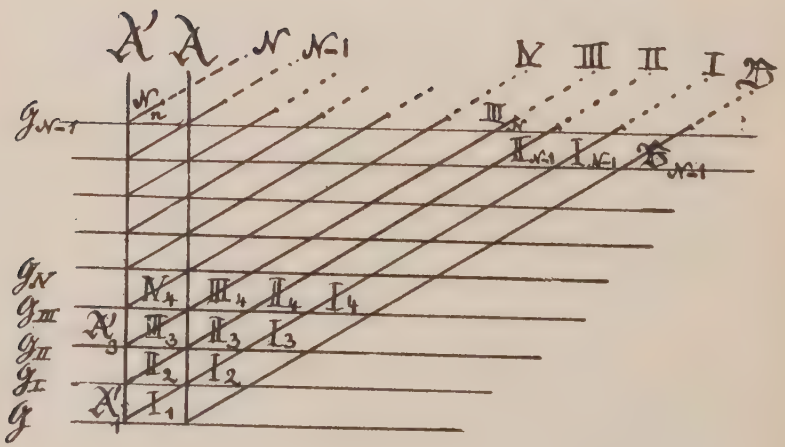
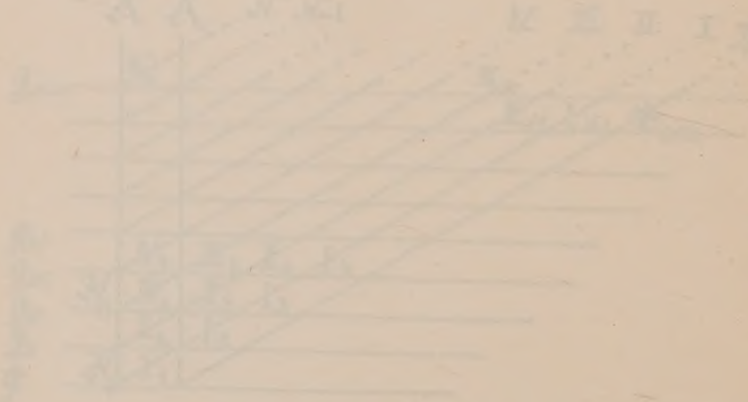

A'
A
g_c
B'
B
g_l
g_l
g'_l
g_l

Fig. 16


A'
A
N
N-1
IV
III
II
I
B
g_{N-1}
g_N
g_{III}
g_{II}
g_I
g
A'_4
A'_3
A'_2
A'_1
B_{N-1}